The Circle الدائرة

نظريات ونتائج مهمة :

١) مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠° .

٢) الزوايا المتجاورة على خط مستقيم تكمل بعضها لـ ١٨٠° .

٣) الزوايا المتقابلة بالرأس متساوية في القياس .

٤) إذا تساوى قياسا زاويتين في مثلث فإن المثلث متساوي الساقين . وينتج أن الضلعان المقابلان لهما متساويان في الطول والعكس صحيح .

٥) في المثلث متساوي الساقين العمود النازل من رأس الزاوية على القاعدة ينصف القاعدة وينصف زاوية الرأس . والعكس صحيح .

٦) في أي مثلث إذا تساوى طول كل من (الارتفاع . المتوسط . ومنصف الزاوية) . فإن المثلث متساوي الساقين .

٧) في أي مثلث إذا كان الارتفاع ينصف القاعدة وطوله يساوي نصف طول القاعدة فإن المثلث متساوي الساقين وقائم الزاوية .

٨) قياس الزاوية الخارجية في المثلث يساوي مجموع قياسي الزاويتين الداخليتين ما عدا المجاورة لها .

٩) في المثلث حاد الزوايا قياس الزاوية الخارجية أكبر من قياس أي زاوية داخلية للمثلث .

١٠) في أي مثلث القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين فيه توازي الضلع الثالث وطولها يساوي نصف طوله .

١١) في المثلث قائم الزاوية:

أ) الوتر أكبر الأضلاع ٠

ب) القطعة المستقيمة الواصلة بين رأس القائمة ومنتصف الوتر طولها يساوي نصف طول الوتر ٠

جـ) إذا كانت القطعة المستقيمة الواصلة بين رأس القائمة ومنتصف الوتر عمودية على الوتر فإن ضلعي القائمة متساويان في القياس (والعكس صحيح) ٠

د) طول الضلع المقابل للزاوية ٣٠° يساوي نصف طول الوتر ، (والعكس صحيح) ٠

١٢) إذا كان قياس أكبر زاوية في مثلث يساوي مجموع قياسي الزاويتين الأخريتين فإن المثلث قائم الزاوية ٠

١٣) يتطابق مثلثان في الحالات التالية :

- إذا تساويا بضلعين والزاوية المحصورة بينهما (ض . ز . ض) ٠
- إذا تساويا بضلع والزاويتين المجاورتان له (ز . ض . ز) ٠
- إذا تساويا بالأضلاع الثلاثة (ض . ض . ض) ٠
- إذا تساويا بضلعين والزاوية المقابلة للضلع الكبير من بينهما (ض.ض.ز)
- إذا تساويا بضلع ووتر وقائمة (حالة خاصة من الفرع السابق) ٠

١٤) يتشابه مثلثان في الحالات التالية :

- (ز . ز . ز) تساوي قياس زوايا المثلث الأول مع قياس زوايا المثلث الثاني على التناظر ٠

- (ض . ز . ض) إذا تساوى قياس زاوية من أحدهما مع قياس زاوية من الثاني والضلعين المحيطين بالزاويتين متناسبين على التناظر ،
- (ض . ض . ض) إذا تناسبت جميع أضلاع المثلث الأول مع الأضلاع المناظرة لها في المثلث الثاني ،

الفصل الأول أوتار الدائرة Chords

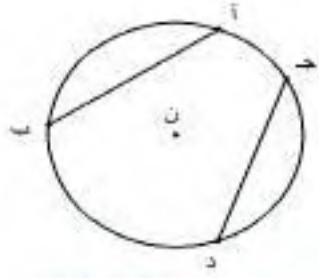
الدائرة : مجموعة من النقط تبعد بعدا ثابتاً عن نقطة ثابتة ، حيث يسمى البعد الثابت بنصف قطر الدائرة ، والنقطة الثابتة بمركز الدائرة ،

==========: :=========

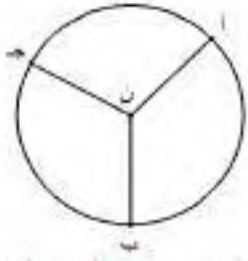
مصطلحات هندسية مرتبطة في الدائرة :

- نصف قطر الدائرة : هو القطعة المستقيمة الواصلة بين مركز الدائرة ونقطة عليها ،
- الوتر : هو القطعة المستقيمة الواصلة بين نقطتين على الدائرة ،
- القطر : هو وتر الدائرة المار بمركزها ، وهو أطول وتر في الدائرة ،
- القاطع : هو المستقيم الذي يحوي وتراً في الدائرة ،
- القوس : هو جزء من الدائرة ، محصور بين نقطتين عليها ،
- المماس : هو المستقيم الذي يقطع (يمس) الدائرة في نقطة عليها ،
- القطاع الدائري : هي المنطقة المحصورة بين نصفي قطرين في الدائرة وقوس ،

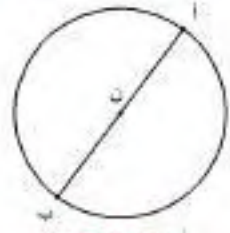
- **القطعة الدائرية :** هي المنطقة المحصورة بين وتر في الدائرة وقوس .



أ ب ، جـ د وتران في الدائرة



ن أ ، ن ب ، ن جـ أنصاف أقطار



أ ب قطر في الدائرة

أ جـ ب قطعة دائرية

دائرة مركزها ن

ملاحظة :- يرمز للدائرة عادة بمركزها

فنقول الدائرة ن لتعني

الدائرة التي مركزها ن

مبرهنة (١) : العمود النازل من مركز الدائرة على أي وتر فيها ينصفه ،

المعطيات : (الشكل المجاور)

$\overline{\text{أب}}$ وتر في الدائرة م ، $\overline{\text{مج}} \perp \overline{\text{أب}}$

المطلوب :

إثبات أن $\overline{\text{مج}}$ ينصف الوتر $\overline{\text{أب}}$ ($\overline{\text{أج}} = \overline{\text{جب}}$)

البرهان :

نصل $\overline{\text{مأ}}$ ، $\overline{\text{مب}}$ ثم نبحث في تطابق المثلثين مجأ ، مجب

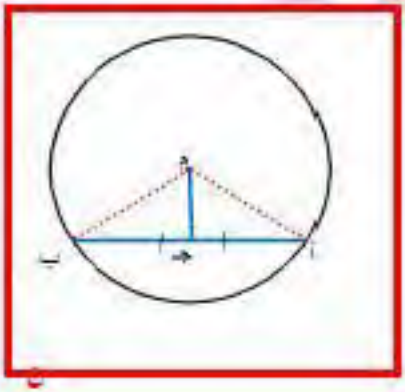
مأ = مب	أنصاف أقطار
مج = مج	ضلع مشترك
ق∠مجب = ق∠مجأ = ٩٠°	معطيات

إذاً ينطبق المثلثان بضلع ووتر وقائمة وينتج أن :

$\overline{\text{أج}} = \overline{\text{جب}}$ ، أي أن $\overline{\text{مج}}$ ينصف الوتر $\overline{\text{أب}}$

سؤال : في البرهان السابق اكتب نتائج أخرى لحالة التطابق بين المثلثين ،

مبرهنة (٢) : المستقيم الواصل بين مركز الدائرة ، ومنتصف وتر فيها غير مار بالمركز ، يعامد الوتر ، ((الشكل))



المعطيات :

$\overline{\text{أب}}$ وتر في الدائرة م ، $\overline{\text{أج}} = \overline{\text{جب}}$

سليمان دلدوم أبو هيه

المطلوب :

إثبات أن $\overline{\text{م جـ}} \perp \overline{\text{أ ب}}$

البرهان :

نصل $\overline{\text{م أ}}$ ، $\overline{\text{م ب}}$ ثم نبحث في تطابق المثلثين م أ جـ ، م ب جـ

م أ = م ب أنصاف أقطار

م جـ = م جـ ضلع مشترك

أ جـ = جـ ب معطيات

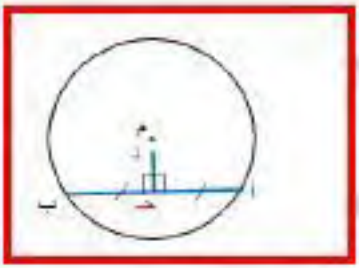
إذاً ينطبق المثلثان بثلاثة أضلاع وينتج أن :

ق∠ م أ جـ = ق∠ م ب جـ وبما أنهما متجاورتان على خط مستقيم

ومجموع قياسهما = ١٨٠° إذاً ق∠ م أ جـ = ق∠ م ب جـ = ٩٠°

إذاً $\overline{\text{م جـ}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ (وهو المطلوب)

مبرهنة (٣) : العمود المقام من منتصف وتر في الدائرة ، يمر بمركزها .



المعطيات :

$\overline{\text{أ ب}}$ وتر في الدائرة م .

$\overline{\text{أ جـ}} = \overline{\text{جـ ب}}$ (جـ نقطة منتصف الوتر) ،، $\overline{\text{د جـ}} \perp \overline{\text{أ ب}}$

المطلوب : إثبات أن $\overline{\text{د جـ}}$ يمر في مركز الدائرة م .

البرهان : نصل $\overline{\text{م أ}}$ ، $\overline{\text{م ب}}$

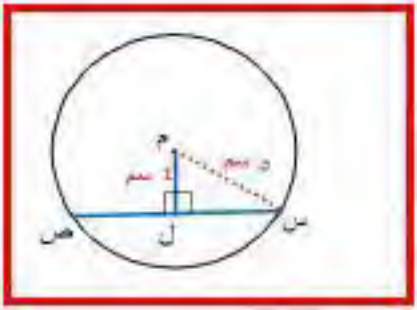
بما أن $\overline{\text{ء جـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أب}}$ وينصفه ، $\overline{\text{م أ}}$ = $\overline{\text{م ب}}$

إذا النقطة م تقع على $\overline{\text{ء جـ}}$ ((أو امتدادها)) ، منها $\overline{\text{ء جـ}}$ يمر في مركز الدائرة ، ((تنصيف قطعة مستقيمة))

تنبيه :

(($\overline{\text{أب}}$ قطعة مستقيمة ، ن نقطة لا تقع على القطعة المستقيمة $\overline{\text{أب}}$ ، د نقطة منتصف القطعة المستقيمة $\overline{\text{أب}}$ ، إذا كان $\overline{\text{ن أ}}$ = $\overline{\text{ن ب}}$ فإن المستقيم $\overleftrightarrow{\text{ن ء}}$ عمودي على القطعة المستقيمة $\overline{\text{أب}}$))

مثال (١) : $\overline{\text{س ص}}$ وتر في دائرة مركزها م ، وطول قطرها (١٠) سم ، القطعة المستقيمة $\overline{\text{م ل}}$ تعامد الوتر $\overline{\text{س ص}}$ في النقطة ل ، إذا كان م ل = ٤ سم ، جد س ص ،



الحل : م مركز الدائرة ، $\overline{\text{م ل}}$ تعامد الوتر $\overline{\text{س ص}}$ إذاً النقطة ل منتصف الوتر

$\overline{\text{س ص}}$ ← س ل = ل ص (الشكل)

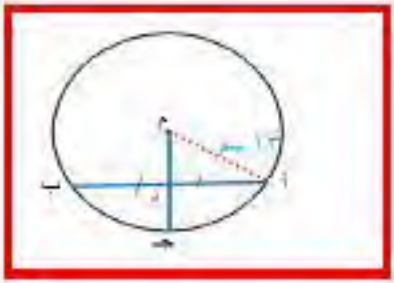
قطر الدائرة = ١٠ ← م س = ٥سم ... م ل = ٤ سم

وبتطبيق مبرهنة فيثاغورس على المثلث (م ل س) القائم الزاوية في ل

$(\text{م س})^{٢} = (\text{م ل})^{٢} + (\text{س ل})^{٢}$ ← $(٥)^{٢} = (٤)^{٢} + (\text{س ل})^{٢}$

٢٥ = ١٦ + $(\text{س ل})^{٢}$ ← $(\text{س ل})^{٢}$ = ٩ ← س ل = ٣

← ← ← س ص = ٢ × س ل = ٢ × ٣ = ٦ سم



مثال (٢) : $\overline{\text{أب}}$ وتر في دائرة مركزها م ، وطول نصف قطرها (١٣) سم ، $\overline{\text{مجـ}}$ نصف قطر في الدائرة ، ينصف الوتر $\overline{\text{أب}}$ في النقطة د ، فإذا كان أب = ١٠ سم ، فجد د جـ .

الحل : $\overline{\text{مجـ}}$ ينصف $\overline{\text{أب}}$ في النقطة د ← $\overline{\text{مد}} \perp \overline{\text{أب}}$ (مبرهنة)

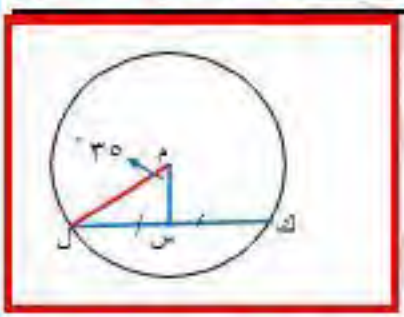
د منتصف $\overline{\text{أب}}$ ← أد = د ب = ٥ سم .

وبتطبيق مبرهنة فيثاغورس على المثلث (م د أ) القائم الزاوية في د

$(\text{مأ})^2 = (\text{أد})^2 + (\text{مد})^2 \leftarrow (١٣)^2 = (٥)^2 + (\text{مد})^2$

$١٦٩ = ٢٥ + (\text{مد})^2 \leftarrow (\text{مد})^2 = ١٤٤ \leftarrow \text{مد} = ١٢$ سم

لكن $\text{مجـ} = \text{مد} + \text{دجـ} \leftarrow ١٣ = ١٢ + \text{دجـ} \leftarrow \text{دجـ} = ١$ سم



مثال (٣) : $\overline{\text{كل}}$ وتر في دائرة مركزها م ، النقطة س منتصف الوتر $\overline{\text{كل}}$ ، ق ∠ ك م س = ٣٥° .

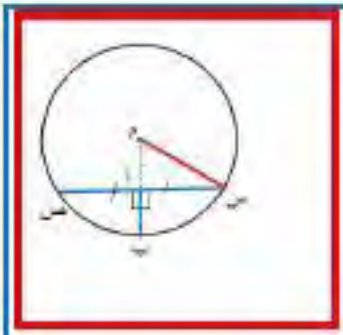
جد ق ∠ م ل س .

الحل : بما أن س منتصف $\overline{\text{كل}}$ ← $\overline{\text{مس}} \perp \overline{\text{كل}}$ ← ق ∠ م س ل = ٩٠°

وبإكمال زوايا المثلث (م س ل) نجد أن

ق ∠ م ل س = ١٨٠° − (٩٠° + ٣٥°) = ٥٥°

((يوجد طرق أخرى للحل مثل استخدام نظريات المثلث متساوي الساقين))



مثال (٤) : $\overline{\text{س ص}}$ وتر في دائرة

مركزها م وطول نصف قطرها (٥) سم .

النقطة أ منتصف $\overline{\text{س ص}}$. أقيم العمود

$\overline{\text{أ ب}}$ على $\overline{\text{س ص}}$. فقطع الدائرة في

النقطة ب على القوس الأصغر $\widehat{\text{س ص}}$. فإذا كان س ص = ٨ سم . فجد أ ب .

الحل : (الشكل)

أ منتصف $\overline{\text{س ص}}$ ← س أ = أ ص = ٤سم . نق = م س = ٥سم

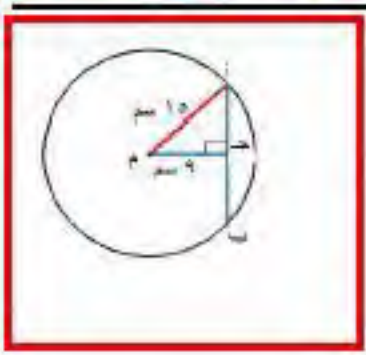
نمد $\overline{\text{أ ب}}$ على استقامته من جهة أ فنجده يمر بمركز الدائرة م (مبرهنة) .

وبتطبيق مبرهنة فيثاغورس على المثلث (م س أ) القائم الزاوية في أ .

$(\text{م س})^{٢} = (\text{س أ})^{٢} + (\text{م أ})^{٢} \leftarrow (٥)^{٢} = (٤)^{٢} + (\text{م أ})^{٢}$

$٢٥ = ١٦ + (\text{م أ})^{٢} \leftarrow (\text{م أ})^{٢} = ٩ \leftarrow \text{م أ} = ٣$ سم

لكن $\text{م ب} = \text{م أ} + \text{أ ب} \leftarrow ٥ = ٣ + \text{أ ب} \leftarrow \text{أ ب} = ٢$ سم



مثال (٥) : في الشكل المجاور دائرة

مركزها م ، $\overline{\text{م جـ}} \perp \overline{\text{أ ب}}$

$\overline{\text{م أ}} = ١٥$ سم ، $\overline{\text{م جـ}} = ٩$ سم

جد أ ب .

الحل : نصل م أ . ونطبق مبرهنة فيثاغورس

على المثلث (م أ جـ) القائم الزاوية في جـ .

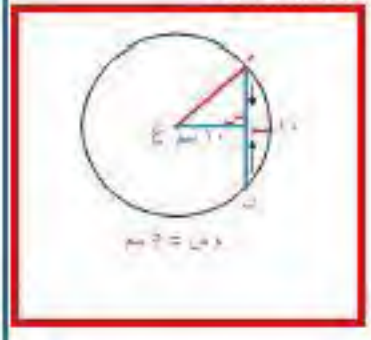
سليمان دلدوم أبو هيه

$(\text{أب})^2 = (\text{أجـ})^2 + (\text{ابـ})^2 \leftarrow (15)^2 = (9)^2 + (\text{ابـ})^2$

$225 = 81 + (\text{ابـ})^2 \leftarrow (\text{ابـ})^2 = 144 \leftarrow$ ابـ = ١٢ سم

أب = ٢ × ابـ ← أب = ٢ × ١٢ ← أب = ٢٤ سم

==========



مثال (٦) : $\overline{\text{أب}}$ وتر في دائرة مركزها ع ، طوله (١٠) سم ، النقطة س منتصف $\overline{\text{أب}}$ ، فإذا كان ع س = ١٠ سم ، فجد طول نصف قطر الدائرة .

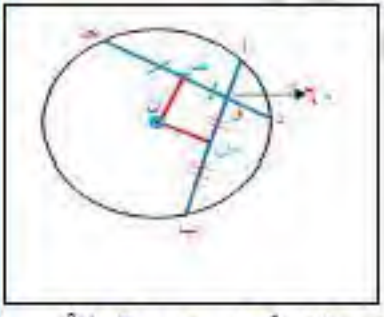
الحل : (الشكل) س منتصف $\overline{\text{أب}}$ ← $\overline{\text{ع س}} \perp \overline{\text{أب}}$

س منتصف $\overline{\text{أب}}$ = ١٠ ← $\overline{\text{أس}} = \overline{\text{س ب}}$ = ٥ سم . ع س = ١٠ سم ،

وبتطبيق نظرية فيثاغورس على المثلث (ع م س) القائم الزاوية في س ،

$(\text{ع أ})^2 = (\text{أس})^2 + (\text{ع س})^2 \leftarrow (\text{ع أ})^2 = (5)^2 + (10)^2$

$(\text{ع أ})^2 = 25 + 100 \leftarrow (\text{ع أ})^2 = 125 \leftarrow$ ع أ = $5\sqrt{5}$ سم



مثال (٧) : $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{جـ د}}$ وتران في دائرة مركزها م ، غير مارين في المركز ، ويتقاطعان في النقطة و ، إذا كان ق ∠ أ و د = ٦٠° ، وكانت م تقع داخل الزاوية الحادة (جـ و ب) ، س منتصف $\overline{\text{أب}}$ ، ص منتصف $\overline{\text{جـ د}}$ ، أثبت أن : ق ∠ س م ص = ١٢٠° .

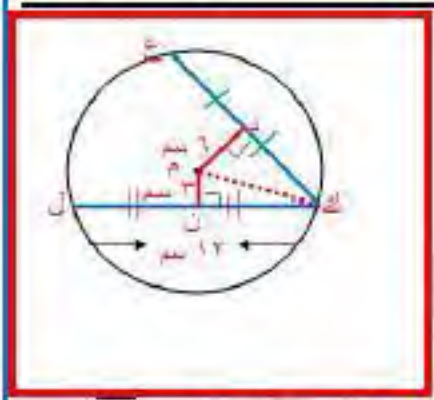
سليمان دلدوم أبو هبه

الحل : (الشكل)

- س منتصف $\overline{أب}$ ← $\overline{مس}$ ⊥ $\overline{أب}$ ← ق∠مسو = ٩٠° ..... (١)
- ص منتصف $\overline{جو}$ ← $\overline{مص}$ ⊥ $\overline{جو}$ ← ق∠مصو = ٩٠° ..... (٢)
- ق∠صوس = ق∠اوج = ٦٠° بالتقابل بالرأس ..... (٣)
- مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي (م ص و س) = ٣٦٠° ،

من (١) ، (٢) ، (٣)

∴ق∠سمص = ٣٦٠° − (٦٠° + ٩٠° + ٩٠°) = ١٢٠° وهو المطلوب .



مثال (٨) : $\overline{كل}$ وتر في دائرة ، طوله (١٢) سم ، ويبعد عن مركزها (٣) سم ، $\overline{كع}$ وتر آخر في الدائرة نفسها ، ويبعد عن مركزها (٦) سم ، جد كع .

الحل : نفرض: مركز الدائرة النقطة م ، ن نقطة منتصف الوتر $\overline{كل}$ ، د نقطة منتصف الوتر $\overline{كع}$ (الشكل) .

- ن نقطة منتصف الوتر $\overline{كل}$ ← $\overline{من}$ ⊥ $\overline{كل}$ ← من = ٣ سم (لماذا) ؟ .
- د نقطة منتصف الوتر $\overline{كع}$ ← $\overline{مد}$ ⊥ $\overline{كع}$ ← مد = ٦ سم (لماذا)؟
- بتطبيق مبرهنة فيثاغورس أولاً على المثلث (م ك ن) القائم الزاوية في ب لإيجاد طول نصف القطر م ك .

(م ك)² = (م ب)² + (ك ب)² ← (م ك)² = (٣)² + (٦)²

(م ك)² = ٩ + ٣٦ ← (م ك)² = ٤٥ ← م ك = √٤٥ سم

- وبتطبيق مبرهنة فيثاغورس ثانياً على المثلث (م ك د) القائم الزاوية في د لإيجاد طول د ك .

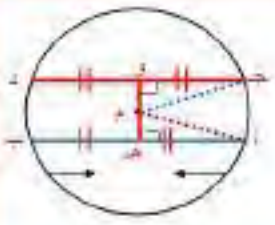
(م ك)² = (م د)² + (د ك)² ← (√٤٥)² = (٦)² + (د ك)²

٤٥ = ٣٦ + (د ك)² ← (د ك)² = ٩ ← د ك = ٣ سم

ع ك = ٢ × د ك = ٢ × ٣ = ٦ سم

تذكر : أقصر مسافة بين نقطة وخط مستقيم ، هي طول العمود النازل من تلك النقطة على الخط المستقيم . ((البعد بين نقطة و مستقيم))

مثال (٩) : (مبرهنة)



$\overline{أب}$ ، $\overline{جـ د}$ وتران في دائرة مركزها م ، ومتساويان في الطول ، أثبت أن لهما البعد نفسه عن م (مركز الدائرة)

المعطيات : (الشكل)

دائرة مركزها م ، $\overline{أب}$ ، $\overline{جـ د}$ وتران في دائرة حيث أب = جـ د

المطلوب : بعد أ ب عن م = بعد جـ د عن م

البرهان :

- هـ منتصف $\overline{أب}$ ← $\overline{م هـ}$ ⊥ $\overline{أب}$ ← ∠م هـ أ = ٩٠° ..... (١)
- و منتصف $\overline{جـ د}$ ← $\overline{م و}$ ⊥ $\overline{جـ د}$ ← ∠م و جـ = ٩٠° ..... (٢)

• نبحث في تطابق المثلثين (ءهأ) ، (ءوجـ)

ب∠أهء = ب∠جـوء = ٩٠° . . . . (١)،(٢)

أء = ءجـ . . . . . أنصاف أقطار في الدائرة م

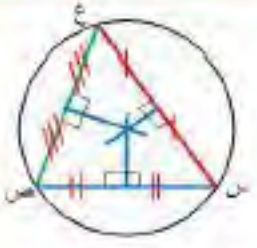
هأ = وجـ . . . . . أنصاف أوتار متساوية في الدائرة م

إذا ينطبق المثلثان بضلع ووتر و قائمة وينتج أن ءهـ = ءو وهو المطلوب .

مبرهنة : إذا تساوى طولا وترين في دائرة ، فإن بعداهما عن مركز الدائرة متساوى ((والعكس صحيح)) .

مثال (١٠) : كيف تحدد مركز دائرة تمر برؤوس المثلث س ص ع ؟

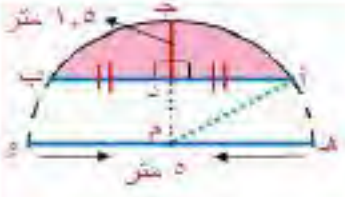
(معتمدا على المبرهنات ١ ، ٢ ، ٣)



الحل :

ننصف الأضلاع س ص ، ص ع ، ع س .. ثم ننشئ أعمدة من هذه المنصفات ، فتكون نقطة تلاقي هذه المنصفات هي مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث .

مثال (١١) : نافذة مسجد مصممة على شكل قوس دائرة ، طول قطرها ٥ أمتار ، فإذا كان ارتفاع قوس النافذة فوق منتصف قاعدتها يساوي ١,٥ متراً ، جد عرض قاعدة النافذة .



الحل : نرسم النافذة (الشكل)

$\overline{أب}$ قاعدة النافذة .. $\overline{جـ د}$ ارتفاع النافذة ، $\overline{أب} \perp \overline{جـ د}$

هـ و قطر الدائرة = ٥ متر ، م مركز الدائرة ((هـ م = ٥و٢ متر نصف قطر))

((جـ م نصف قطر للدائرة م)) .. د م = جـ م − جـ د = ٥و٢ − ٥و١ = ١ متر

نصل (م أ) ونطبق نظرية فيثاغورس على المثلث (م أ د) القائم الزاوية في د

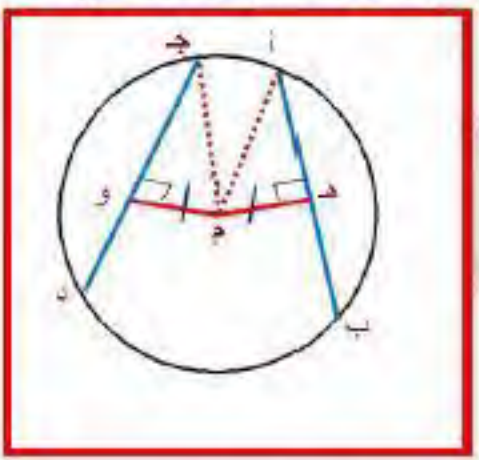
$(أم)^٢ = (م د)^٢ + (أ د)^٢ \leftarrow (٥و٢)^٢ = (١)^٢ + (أ د)^٢$

$٦و٢٥ = ١ + (أ د)^٢ \leftarrow (أ د)^٢ = ٥و٢٥ \leftarrow أ د = \sqrt{٥و٢٥}$

$أب = ٢ \times أ د = ٢ \times \sqrt{٥و٢٥} = ٢\sqrt{٥و٢٥}$ مترا عرض القاعدة

مبرهنة :

إذا تساوى بعدا وترين عن مركز دائرة ، فإن الوترين متساويين في الطول .



المعطيات : من الشكل المجاور

دائرة مركزها م ، $\overline{أب}$ ، $\overline{جـ د}$ وتران

في الدائرة ، هـ منتصف $\overline{أب}$ ،

و منتصف $\overline{جـ د}$ ، $\overline{م هـ} = \overline{م و}$

المطلوب : إثبات أن : $\overline{أب} = \overline{جـ د}$

البرهان :

- هـ منتصف $\overline{أب} \leftarrow \overline{م هـ} \perp \overline{أب} \leftarrow$ ق∠م هـ أ = ٩٠° ..... (١)
- و منتصف $\overline{جـ د} \leftarrow \overline{م و} \perp \overline{جـ د} \leftarrow$ ق∠م و جـ = ٩٠° ..... (٢)

• نبحث في تطابق المثلثين (ءهـا) ، (ءوجـ)

ن∠اهـء = ن∠جـوء = ٩٠° . . . . (١)،(٢)

ءا = ءجـ . . . . . أنصاف أقطار في الدائرة م

ءهـ = ءو . . . . . معطيات

إذا ينطبق المثلثان بضلع ووتر و قائمة وينتج أن اهـ = جـو

وبما أن

اهـ = $\frac{١}{٢}$ اب ، جـو = $\frac{١}{٢}$ $\overline{جـد}$ إذاً $\overline{اب}$ = $\overline{جـد}$ وهو المطلوب .

س١ : $\overline{اب}$ ، $\overline{جـد}$ وتران في دائرة مركزها م . طول نصف قطرها (١٣) سم

$\overline{اب}$ // $\overline{جـد}$ ، إذا كان أ ب = ٢٤ سم ، جـ د = ١٠ سم .

د نقطة منتصف $\overline{اب}$ ، هـ نقطة منتصف $\overline{جـد}$ ، جد طول د هـ

١) إذا كان الوترين يقعان في جهتين مختلفتين من المركز .

٢) إذا كان الوترين يقعان في جهة واحدة من المركز .

س٢ : إذا كانت الدائرة م تمر برؤوس المثلث أ ب جـ القائم الزاوية في ب .

ن نقطة منتصف أ ب ، ن م = ٦ سم ، فجد طول ب جـ .

س٣ : سعيد لديه حديقة دائرية الشكل ، إذا قرر سعيد وضع حنفية ماء في منتصف الحديقة ، وضح كيف يمكنك مساعدة سعيد في وضع الحنفية .

س٤ : دائرة مركزها م ، تمر برؤوس المثلث أ ب جـ ، إذا كان $\overline{\text{م د}} \perp \overline{\text{أ جـ}}$ ،

$\overline{\text{م هـ}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$ ،

١) أثبت أن $\overline{\text{د هـ}} \parallel \overline{\text{أ ب}}$

٢) بين أن محيط المثلث د هـ م = $\frac{١}{٢}$ محيط المثلث أ ب جـ ،

س٥ : دائرة مركزها م ، تمر برؤوس المثلث أ ب جـ متساوي الأضلاع، إذا كان

$\overline{\text{م د}} \perp \overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{م هـ}} \perp \overline{\text{أ جـ}}$ ،

أثبت أن المثلث أ د هـ متساوي الأضلاع ،

س٦ : دائرة مركزها م ، تمر برؤوس المثلث أ ب جـ متساوي الساقين ، الذي فيه جـ أ = جـ ب ، النقاط د ، هـ ، و منتصفات الأضلاع أ ب ، أ جـ ، ب جـ على الترتيب ، إذا كان ∠ و هـ جـ = ٥٠° ، فجد ∠ د و هـ ،

س٧ : $\overline{\text{أ ب}}$ وتر في دائرة مركزها م ، د نقطة منتصف الوتر $\overline{\text{أ ب}}$ ، مد (م د) على استقامته من جهة د فقطع الدائرة في النقطة جـ ،

١) أثبت أن المثلث (جـ أ ب) متساوي الساقين ،

٢) ما هو اسم الشكل الرباعي (م أ جـ ب) ،

إذا سرقَ الفقيرُ رغيفَ خبزٍ ليأكلهُ سقوه السم ماءَ

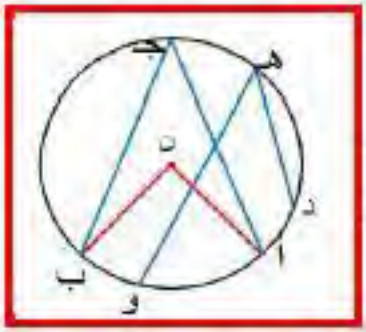
ويسرقُ ذو الغنى أرزاقَ شعبٍ برمتهِ ولا يلقى جزاءَ

Central Angle and Inscribed Angle

تعريف :

الزاوية المركزية : هي الزاوية التي يقع رأسها في مركز الدائرة ، وضلعاها أنصاف أقطار .

الزاوية المحيطية : هي الزاوية التي يقع رأسها على محيط الدائرة ، وضلعاها وترين في الدائرة .



مثال (١) : اعتماداً على الشكل المجاور

١) سم الزوايا المركزية والقوس المرسومة عليه

٢) سم الزوايا المحيطية والقوس المرسومة عليه

٣) سم الزوايا المرسومة على الوتر $\overline{\text{اب}}$

وما نوع كل منهما .

الحل :-

١) ∢ا ن ب ← $\overset{\frown}{\text{اب}}$ الأصغر .. ∢ا د ب ← $\overset{\frown}{\text{اب}}$ الأكبر .

٢) ∢د هـ و ← $\overset{\frown}{\text{د و}}$ ... ∢ا جـ ب ← $\overset{\frown}{\text{اب}}$.

٣) ∢ا ن ب ← $\overline{\text{اب}}$ مركزية .. ∢ا جـ ب ← $\overline{\text{اب}}$.

لاحظ في المثال السابق أن الزاويتين (المركزية ∢ا ن ب ، المحيطية ∢ا جـ ب) مرسومتان على الوتر $\overline{\text{اب}}$ ، استخدم المنقلة في إيجاد قياس كل من الزاويتين

ماذا تلاحظ ؟ ارسم دائرة وبداخلها زاويتان محيطية ومركزية على نفس الوتر بحيث تكون الزاوية المركزية منفرجة ، ثم جد قياس كل منهما .

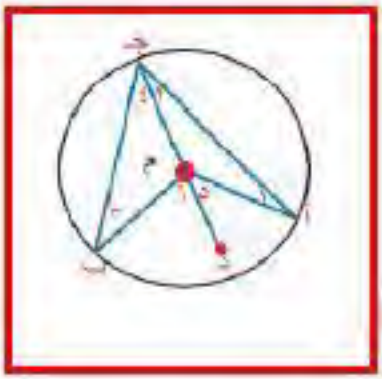
سليمان دلدوم أبو هيه

لا بد أنك لاحظت أن قياس الزاوية المركزية يساوي مثلي قياس الزاوية المحيطية المرسومة على الوتر (القوس) نفسه ،

أو بصورة أخرى : قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس الزاوية المركزية المرسومة على الوتر (القوس) نفسه ،

مبرهنة

قياس الزاوية المركزية يساوي مثلي قياس الزاوية المحيطية المرسومة على الوتر (القوس) نفسه .



الحالة الأولى : النقطة م (مركز الدائرة) تقع داخل الزاوية المحيطية ،

المعطيات : ∠أمب زاوية مركزية ، ∠أجب زاوية محيطية ، مرسومتان على القوس $\overset{\frown}{أب}$ الأصغر ،

المطلوب : إثبات أن ق∠أمب = ٢ق∠أجب

البرهان : نصل $\overline{جـم}$ ونمده إلى د ، ثم نرقم الزوايا كما في الشكل ،

في المثلث (م أ جـ) متساوي الساقين (متطابق الضلعين)

- ق∠١ = ق∠٢ = س° زاويتا القاعدة متساويتان ،
- ق∠٥ = ق∠١ + ق∠٢ = ٢س° زاوية خارجة للمثلث (م أ جـ)

في المثلث (م جـ ب) متساوي الساقين (متطابق الضلعين)

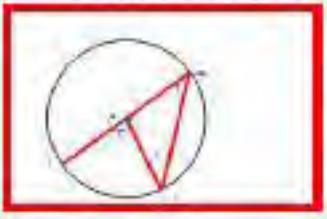
- ق∠٣ = ق∠٤ = س° زاويتا القاعدة متساويتان ،
- ق∠٦ = ق∠٣ + ق∠٤ = ٢س° زاوية خارجة للمثلث (م جـ ب)

ق ∠٥ + ق ∠٦ = ٢ س° + ٢ ص°

ق ∠أ م ب = ٢ (س° + ص°)

ق ∠أ م ب = ٢ (ق ∠أ جـ ب)

==========



الحالة الثانية : إذا كان قطر الدائرة أحد ضلعي الزاوية المحيطية(مركز الدائرة يقع على ضلع المحيطية)

المعطيات : دائرة مركزها م ، $\overline{\text{أجـ}}$ قطر في الدائرة

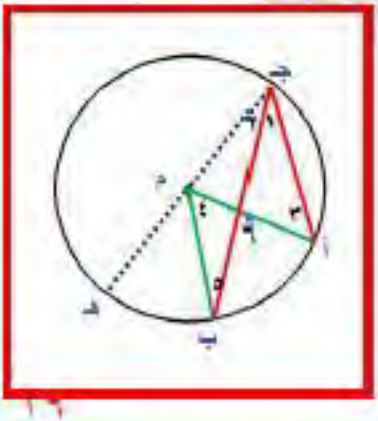
∠أ م ب زاوية مركزية ، ∠أ جـ ب زاوية محيطية ، مرسومتان على القوس $\overset{\frown}{\text{أب}}$ الأصغر ،

المطلوب : إثبات أن ق ∠أ م ب = ٢ ق ∠أ جـ ب ،

البرهان : في المثلث (م ب جـ) متساوي الساقين (متطابق الضلعين)

- ق ∠١ = ق ∠٢ = س° زاويتا القاعدة متساويتان ،
- ق ∠٣ = ق ∠١ + ق ∠٢ = ٢ س° زاوية خارجة للمثلث (م ب جـ)

إذاً ق ∠٣ = ٢ ق ∠٢ = ٢ س° ← ق ∠أ م ب = ٢ ق ∠أ جـ ب المطلوب



الحالة الثالثة :

م مركز الدائرة يقع خارج الزاوية المحيطية

المعطيات : دائرة مركزها م ، ∠أ م ب زاوية مركزية ، ∠أ جـ ب زاوية محيطية ، مرسومتان على القوس $\overset{\frown}{\text{أب}}$ الأصغر ،

سليمان دلدوم أبو هيه

المطلوب : إثبات أن ق∠أمب = ٢ ق∠أجب .

البرهان : نرسم القطر $\overline{\text{أجـ}}$

في المثلث (م أ جـ) متساوي الساقين (متطابق الضلعين)

- ق∠١ + ق∠٢ = ق∠٣ . . . . . (١)

في المثلث (م جـ ب) متساوي الساقين (متطابق الضلعين)

- ق∠٢ = ق∠٥ . . . . . (٢)
- ق∠٦ = ق∠١ + ق∠٣ . . . . . (٣)
  ق∠٦ = ق∠٤ + ق∠٥ . . . . . (٤)

∠٦ زاوية خارجة للمثلثين (جـ أ د ، ب م د) إذا من (٣) ، (٤)

ق∠٤ + ق∠٥ = ق∠١ + ق∠٣ . . . . . (٥)

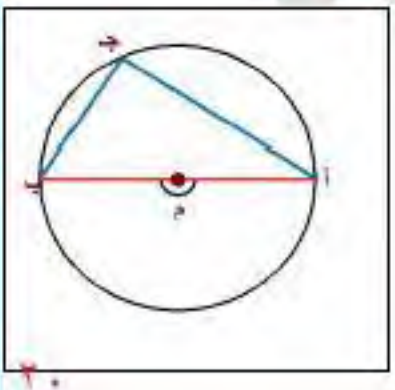
وبتعويض (١) في (٥) نحصل على

ق∠٤ + ق∠٥ = ق∠١ + ق∠١ + ق∠٢ . . . . . (٦)

لكن من (٢) ق∠٢ = ق∠٥

ق∠٤ = ٢ × ق∠١ ← ق∠أمب = ٢ ق∠أجب وهو المطلوب .

مبرهنة : الزاوية المحيطية المرسومة على قطر الدائرة قائمة .



المعطيات : ∠أجب زاوية محيطية على القطر $\overline{\text{أب}}$ ، ∠أمب زاوية مركزية

المطلوب : إثبات أن ق∠أجب = ٩٠°

البرهان : ق∠أمب = ١٨٠° ، زاوية مستقيمة

سليمان دلدوم أبو هبه

الزاويتان المحيطية ∠أجب ، والمركزية ∠أمب مرسومتان على نفس القوس

إذاً

ق ∠أمب = ٢ × ق ∠أجب

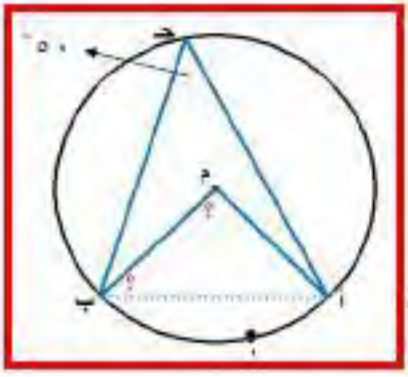
١٨٠° = ٢ × ق ∠أجب

ق ∠أجب = ٩٠° . . . . وهو المطلوب

مثال (١):- في الشكل المجاور

م مركز الدائرة ، جد قياس كل من

∠أمب ، ∠أبم .



الحل :

- ∠أمب ، ∠أبم مركزية ومحيطية مرسومتان على القوس نفسه $\overset{\frown}{أب}$

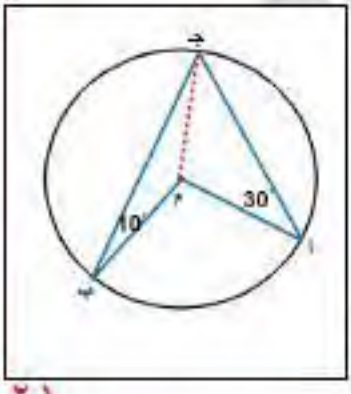
إذا ق ∠أمب = ٢ق ∠أجب = ١٠٠° قياس المركزية مثلي المحيطية

- ق ∠أبم = ق ∠بأم م أ = م ب .في المثلث م أ ب (أنصاف أقطار)

ق ∠أبم = $\frac{١}{٢}$(١٨٠° − ١٠٠°) = ٤٠° إكمال زوايا المثلث

مثال (٢):- في الشكل المجاور دائرة مركزها م

جد ق ∠أمب



الحل : نصل م جـ

- ق ∠أجم = ق ∠جأم = ٣٠°

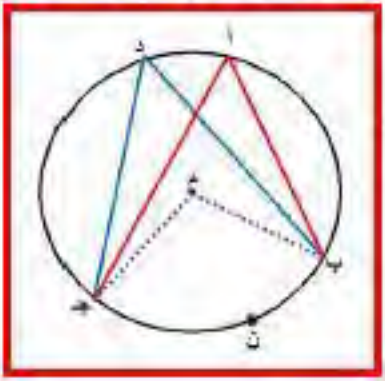
المثلث (م جـ أ) متطابق الضلعين (م جـ = م أ)

- ق∠ب جـ م = ق∠جـ ب م = ١٠ °

المثلث (جـ ب م) متطابق الضلعين (م جـ = م ب)

- ق∠ا جـ ب = ق∠ا جـ م + ق∠ب جـ م = ٣٠ ° + ١٠ ° = ٤٠ °
- ق∠ا م ب = ٢ ق∠ا جـ ب = ٢ × ٤٠ ° = ٨٠ ° مركزية ومحيطية على القوس نفسه $\overset{\frown}{ا ب}$ (الوتر $\overline{ا ب}$) .

مبرهنة : الزاويتان المحيطيتان المرسومتان على قوس واحد (وتر واحد) متساويتان في القياس .



المعطيات : دائرة مركزها م ، الزاويتان المحيطيتان (∠ب ا جـ ، ق∠ب د جـ) مرسومتان على القوس نفسه $\overset{\frown}{ب ن جـ}$ (الوتر $\overline{ب جـ}$)

المطلوب : إثبات أن ق∠ب ا جـ = ق∠ب د جـ

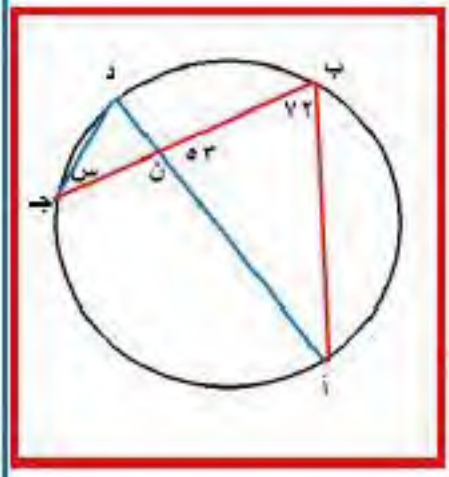
البرهان : نصل $\overline{م ب}$ ، $\overline{م جـ}$

- ق∠ب ا جـ = $\frac{١}{٢}$ ق∠ب م جـ ..... (١) محيطية ومركزية على القوس $\overset{\frown}{ب ن جـ}$
- ق∠ب د جـ = $\frac{١}{٢}$ ق∠ب م جـ ..... (٢) محيطية ومركزية على القوس $\overset{\frown}{ب ن جـ}$

من (١) ، (٢) ق∠ب ا جـ = ق∠ب د جـ وهو المطلوب .

((أسامح لأرتاح .. وأتناسى لأبتسم .. وأصمت لأني لا أريد أن أجادل .. وأتجاهل لأن لا شيء يستحق .. وأصبر لأن ثقتي بالله ليس لها حدود .. النفس الطيبة لا يملكها إلا الشخص الطيب .. والسيرة الطيبة هي أجمل ما يتركه الإنسان في قلوب الآخرين .. ومن تسبب في سعادة إنسان تحققت له سعادته))

سليمان دلدوم أبو هيه



مثال (٣):- في الشكل المجاور جد قيمة س

الحل :

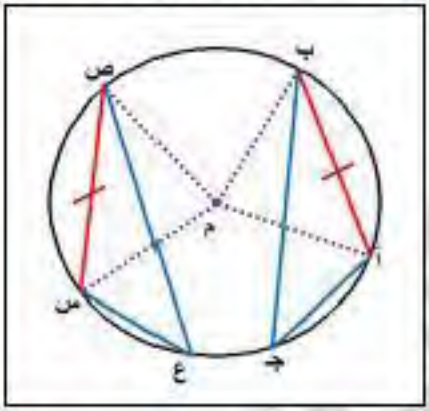
ق∠ب جـ د = ق∠ب أ جـ محيطيتان على القوس $\overset{\frown}{ب د}$ (الوتر $\overline{ب د}$) ٠

ق∠ب جـ د = س = ١٨٠° − (٧٢° + ٥٣°) = ٥٥°

إكمال زوايا المثلث (أ ب ن) ٠

ملاحظة : فكر في حل آخر ٠

مبرهنة : الزاويتان المحيطيتان المرسومتان على قوسين متساويي في القياس (وترين) متساويتين في القياس ٠



المعطيات : دائرة مركزها م ، الوتران $\overline{أب}$ ، $\overline{ص س}$ متساويان في القياس

المطلوب : إثبات أن

ق∠أ جـ ب = ق∠س ع ص

البرهان :

نصل $\overline{م أ}$ ، $\overline{م ب}$ ، $\overline{م ص}$ ، $\overline{م س}$. ونبحث في تطابق المثلثين

م أ ب ، م س ص

م أ = م س أنصاف أقطار

م ب = م ص أنصاف أقطار

أ ب = س ص معطيات

ينطبق المثلثان بثلاثة أضلاع وينتج أن

ق∠أ م ب = ق∠س م ص ٠ (١)

سليمان دلدوم أبو هبه

لكن ق∠أجب = $\frac{1}{2}$ ق∠أمب ∴ (٢) محيطية ومركزية على الوتر $\overline{أب}$

ق∠س٤ص = $\frac{1}{2}$ ق∠س٢ص ∴ (٣) محيطية ومركزية على الوتر $\overline{ص س}$

من (١) ، (٢) ، (٣) ينتج أن ق∠أجب = ق∠س٤ص وهو المطلوب .

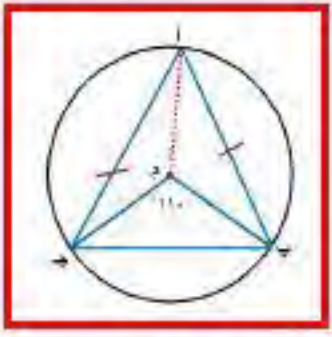
بصورة عامة :

الزوايا المحيطية المرسومة على أوتار متطابقة (أقواس متطابقة) تتساوى في القياس

==========

مثال (٤):- في الشكل المجاور ، دائرة مركزها م ، أ ب = أ جـ ، جد قياس

كل من : أ) ∠باجـ ب) ∠اب٢



الحل :

أ) ق∠باجـ = $\frac{1}{2}$ ق∠ب٢جـ = ٥٥°

محيطية ومركزية على الوتر $\overline{أب}$.

ب) ق∠ب٢ = ق∠جـ٢أ = $\frac{1}{2}$(٣٦٠° − ١١٠°) = ١٢٥°

مركزيتين على وترين متطابقين (الدورة الكاملة)

لكن المثلث ب م أ متطابق الضلعين (م أ = م ب) ، إذاً

ق∠اب٢ = $\frac{1}{2}$(١٨٠° − ١٢٥°) = ٢٧٫٥° وهو المطلوب

حل أخر لفرع ب : المثلث أ ب جـ متطابق الضلعين (أ ب = أ جـ)

ق∠اب جـ = $\frac{1}{2}$(١٨٠° − ٥٥°) = ٦٢٫٥° ∴ (١)

المثلث م ب جـ متطابق الضلعين (م ب = م جـ)

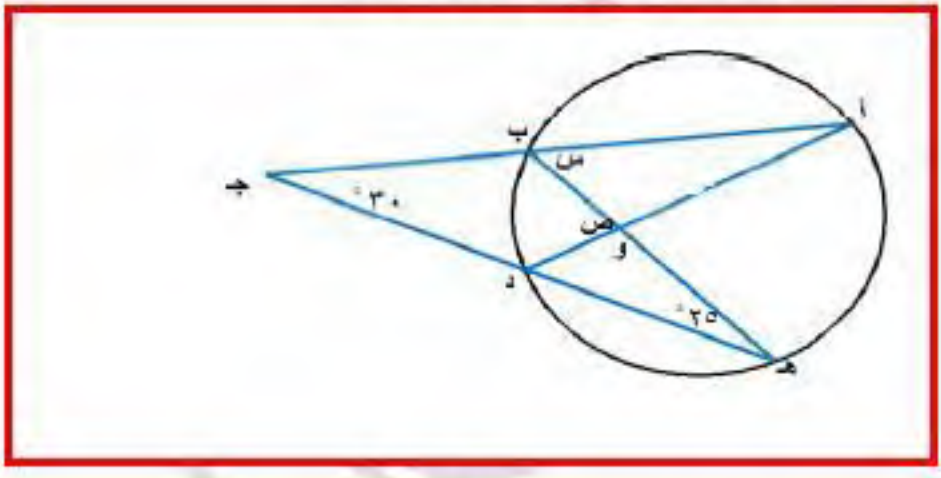
ق∠أ ب جـ = $\frac{1}{2}$ (١٨٠° − ١١٠°) = ٣٥° ..... (٢)

من (١) ، (٢)

ق∠أ ب د = ق∠أ ب جـ − ق∠د ب جـ

= ٦٢٫٥° − ٣٥° = ٢٧٫٥° وهو المطلوب

مثال (٥):- في الشكل ، جد قيمة كل من : س ، ص ،

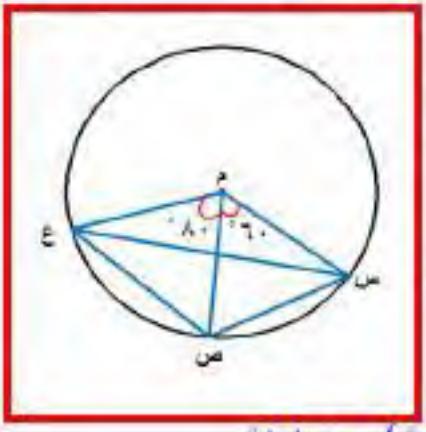


الحل :

- س = ق∠أ ب هـ = ٥٥° زاوية خارجة للمثلث ب هـ جـ ،
- ق∠د أ هـ = ق∠د ب هـ = ٢٥° محيطيتان على الوتر $\overline{\text{ب د}}$ ،
- ص = ق∠ب و د = ٨٠° زاوية خارجة للمثلث أ و ب ،

ملاحظة : يوجد طرق أخرى للحل ،

مثال (٦):- يمثل الشكل دائرة مركزها م ، احسب قياسات زوايا المثلث س ص ع



الحل :

- ق ∠ ع س ص = $\frac{١}{٢}$ ق ∠ ع م ص = ٤٠°

محيطية ومركزية على الوتر $\overline{ع ص}$

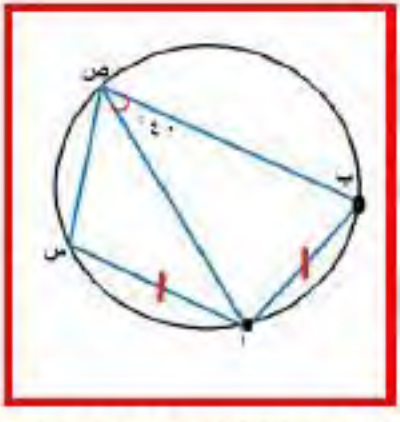
- ق ∠ س ع ص = $\frac{١}{٢}$ ق ∠ س م ص = ٣٠°

محيطية ومركزية على الوتر $\overline{س ص}$

- ق ∠ س ص ع = ١٨٠° − (٤٠° + ٣٠°) = ١١٠°

إكمال زوايا المثلث س ص ع .

مثال (٧):- في الشكل المجاور إذا كان (أ ب = أ س) ، جد ق ∠ س ص ب .



الحل :

ق ∠ أ ص س = ق ∠ أ ص ب = ٤٠°

محيطيتان على وترين متطابقين .

إذاً

ق ∠ س ص ب = ٨٠°

==========

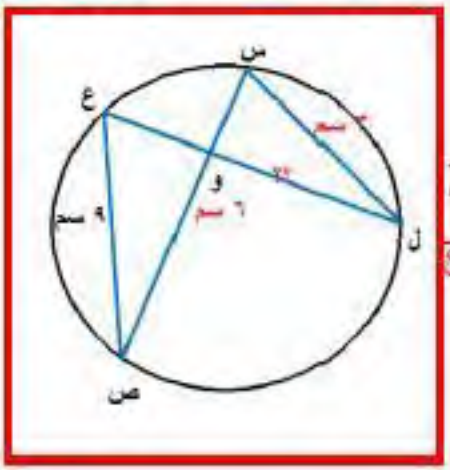
قيل للسعادة : أين تسكنين

قالت : في قلوب الراضين بقضاء الله .

سليمان دلدوم أبو هيه

مثال (٨):- $\overline{\text{س ص}}$ ، $\overline{\text{ع ل}}$ وتران متقاطعان داخل دائرة في النقطة و ، بحيث

إن ع ص = ٩ ، ص و = ٦ ، س ل = ٣ (بالسم) ، جد طول (ل و)



الحل : الشكل المجاور

في المثلثين (و س ل ، و ع ص)

∠س = ∠ع محيطيتان على الوتر $\overline{\text{ل ص}}$

∠ل = ∠ص محيطيتان على الوتر $\overline{\text{س ع}}$

∠س و ل = ∠ع و ص بالتقابل بالرأس

يتشابه المثلثان بثلاث زوايا وينتج أن

$$\frac{\text{و س}}{\text{و ع}} = \frac{\text{و ل}}{\text{و ص}} = \frac{\text{س ل}}{\text{ع ص}}$$

$$\frac{\text{و ل}}{٦} = \frac{٣}{٩} \leftarrow \text{و ل} = ٢ \text{ سم}$$

مثال (٩):- $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{جـ د}}$ وتران متقاطعان داخل دائرة في النقطة و :

أ) أثبت أن : و أ × و ب = و جـ × و د .

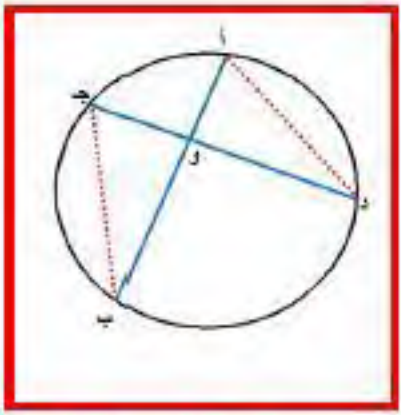
ب) إذا كان و أ = ٤ سم ، و ب = ٦ سم ، و د = ١٢ سم ،

جد قيمة كل من : و جـ ، جـ د .

ت) إذا كان و أ = ٣ سم ، و ب = ٦ سم ، جـ د = ١١ سم ،

جد قيمة كل من : و جـ ، و د .

سليمان دلدوم أبو هيه



الحل :

أ) البرهان :

في المثلثين (و أ د ، و جـ ب)

∠ أ = ∠ جـ محيطيتان على الوتر $\overline{\text{د ب}}$

∠ د = ∠ ب محيطيتان على الوتر $\overline{\text{أ جـ}}$

∠ أ و د = ∠ جـ و ب بالتقابل بالرأس

$$\frac{\text{و أ}}{\text{و جـ}} = \frac{\text{و د}}{\text{و ب}} = \frac{\text{أ د}}{\text{جـ ب}}$$

و أ × و ب = و جـ × و د

يتشابه المثلثان بثلاث زوايا وينتج أن

ب) من الفرع السابق (أ)

$$\frac{\text{و أ}}{\text{و جـ}} = \frac{\text{و د}}{\text{و ب}} = \frac{\text{أ د}}{\text{جـ ب}}$$

$$\frac{٤}{\text{و جـ}} = \frac{١٢}{٦} \leftarrow \text{و جـ} = ٢ \text{ سم}$$

ج د = ج و + و د = ١٤ سم

جـ) نفرض طول جـ و = س ،، إذا ود = ١١ – س

$$\frac{\text{و أ}}{\text{و جـ}} = \frac{\text{و د}}{\text{و ب}}$$

$$\frac{٣}{\text{س}} = \frac{١١ - \text{س}}{٦} \leftarrow ١١\text{س} - \text{س}^{٢} = ١٨$$

$$\text{س}^{٢} - ١١\text{س} + ١٨ = ٠ \leftarrow (\text{س} - ٢)(\text{س} - ٩) = ٠$$

$$\text{س} = ٢ \quad \text{أو} \quad \text{س} = ٩$$

عند س = ٢ ← و جـ = ٢ سم ،، ود = ٩ سم

عند س = ٩ ← و جـ = ٩ سم ،، ود = ٢ سم

المماسات

Tangents

أولاً : مماسات الدائرة Tangents of Circle

- لتكن ن نقطة تقع خارج دائرة مركزها م ونصف قطرها ر فإن م ن > م ر .

أما إذا كانت النقطة ن تقع داخل الدائرة فإن م ن < م ر .

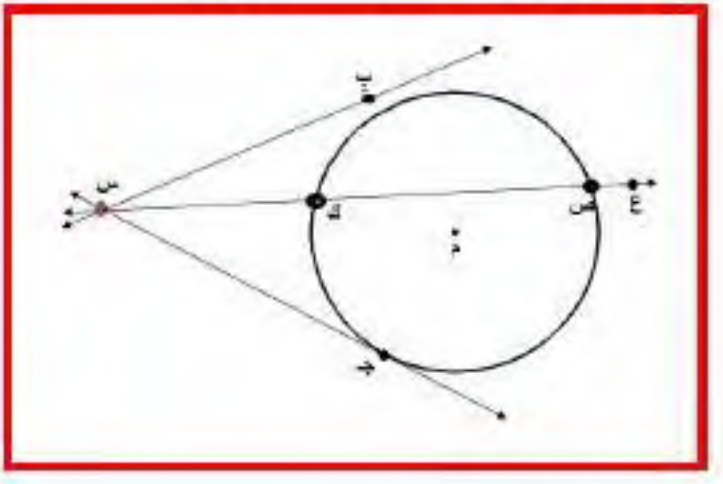
- إذا كانت النقطة س تقع خارج دائرة مركزها م ، فإنه يوجد عدد لا نهائي من المستقيمات يمر في النقطة س ، لكن ما علاقة هذه المستقيمات في الدائرة .

١) يقطع الدائرة في نقطتين مثل المستقيم $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ ، ويسمى قاطعاً للدائرة .

٢) يقطع الدائرة في نقطة واحدة مثل المستقيم $\overleftrightarrow{\text{س ج}}$ ، ويسمى مماساً للدائرة وتسمى النقطة بنقطة التماس .

٣) يقع بأكمله خارج الدائرة مثل المستقيم $\overleftrightarrow{\text{س ب}}$.

والشكل التالي يوضح العلاقة بين المستقيم والدائرة .

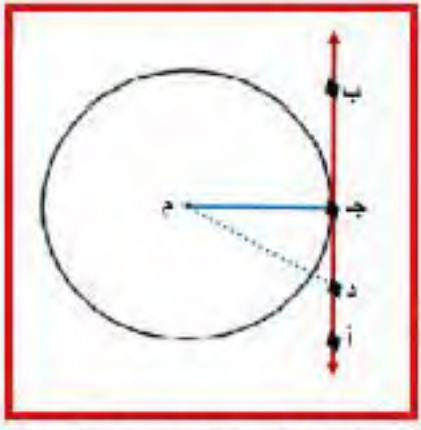


سليمان دلدوم أبو هبه

تذكر

- أقصر قطعة مستقيمة تصل بين نقطة ومستقيم هي القطعة العمودية عليه من تلك النقطة .

مبرهنة : مماس الدائرة يكون عمودياً على نصف القطر المرسوم من نقطة التماس .



المعطيات : $\overline{أب}$ مماس للدائرة م ، عند النقطة جـ

$\overline{مجـ}$ نصف قطر للدائرة .

المطلوب : إثبات أن $\overline{مجـ} \perp \overline{أب}$

البرهان :

لتكن د ، أية نقطة على المستقيم $\overline{أب}$ غير النقطة جـ .

ارسم $\overline{مد}$ ، النقطة د تقع خارج الدائرة (المماس يقطع الدائرة في نقطة واحدة فقط جـ)

- $مد > مجـ$ (م جـ = طول نصف قطر الدائرة) .

فتكون $\overline{مجـ}$ أقصر قطعة تصل بين المركز (م) والمماس $\overline{أب}$

إذاً $\overline{مجـ} \perp \overline{أب}$ وهو المطلوب .

==========

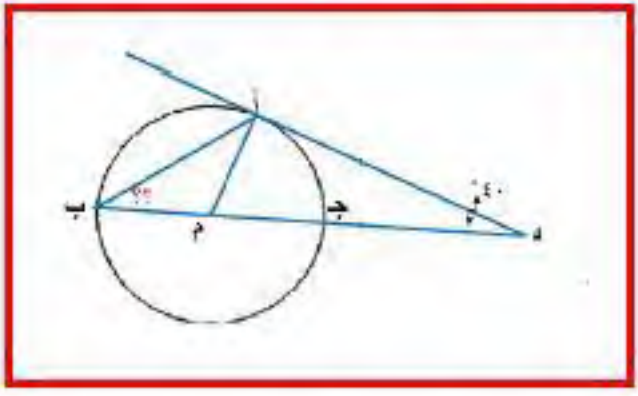
مبرهنة :

المستقيم الذي يعامد نصف قطر الدائرة في نهايته على الدائرة يكون مماسا لها .

==========

مثال (١) : في الشكل المجاور دائرة مركزها م ، جد ق∠أ ب جـ

الحل :



- ق∠أ د م = ٩٠°

(($\overline{أم}$ ⊥ $\overline{أد}$))

$\overline{أد}$ مماس للدائرة .

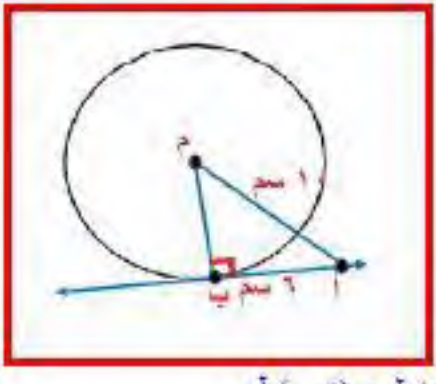
- ق∠م أ د = ١٨٠° − (٩٠° + ٤٠°) = ٥٠° إكمال زوايا المثلث م أ د

- ق∠أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ ق∠م أ د = ٢٥° محيطية ومركزية على الوتر $\overline{أجـ}$.

==========

مثال (٢) : $\overline{أب}$ يمس دائرة مركزها م عند النقطة ب ، أ ب = ٦ سم ، أ م = ١٠ سم ،

جد طول قطر الدائرة .



الحل :

$\overline{أب}$ مماس للدائرة عند النقطة ب . إذاً

$\overline{مب}$ ⊥ $\overline{أب}$ ← △ م ب أ قائم الزاوية في ب

وبتطبيق مبرهنة فيثاغورث على المثلث م ب أ

(م أ)^٢ = (ب أ)^٢ + (م ب)^٢ ← (١٠)^٢ = (٦)^٢ + (م ب)^٢

١٠٠ = ٣٦ + (م ب)^٢ ← (م ب)^٢ = ٦٤ ← م ب = ٨ سم

لكن قطر الدائرة = ٢ × م ب = ١٦ سم وهو المطلوب .

مبرهنة :

إذا رسم مماسان لدائرة مركزها (م) ، من نقطة خارجها مثل (ن) ، وكانت نقطتا التماس هما أ ، ب فإن :

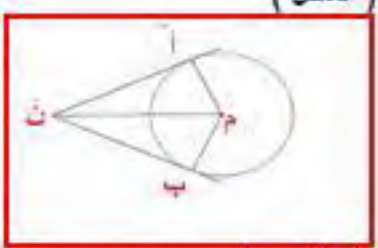
١) ن أ = ن ب

٢) $\overline{\text{م ن}}$ ينصف الزاوية المحصورة بين المماسين (∠أ ن ب) .

٣) $\overline{\text{م ن}}$ ينصف الزاوية بين نصفي القطرين (∠أ م ب) .

المعطيات :

دائرة مركزها م ، $\overline{\text{ن أ}}$ ، $\overline{\text{ن ب}}$ مماسان للدائرة (الشكل)



المطلوب :

١) ن أ = ن ب

٢) $\overline{\text{م ن}}$ ينصف الزاوية المحصورة بين المماسين (∠أ ن ب) .

٣) $\overline{\text{م ن}}$ ينصف الزاوية بين نصفي القطرين (∠أ م ب) .

البرهان :

- ∠م أ ن = ٩٠° ← م أ ⊥ ن أ (مبرهنة / نصف القطر عمودي على المماس)
- ∠م ب ن = ٩٠° ← م ب ⊥ ن ب (مبرهنة / نصف القطر عمودي على المماس)
- نبحث في تطابق المثلثين ن م أ ، ن م ب :

ن∆م أ ن = ن∆م ب ن قائمتان

م ن = م ن ضلع مشترك

م أ = م ب نصفي قطرين في الدائرة

ينطبق المثلثين بضلع ووتر وقائمة وينتج أن :

١) ن أ = ن ب

٢) ∠ن أ م = ∠ن ب م

٣) ∠ن م أ = ∠ن م ب وهو المطلوب .

من المبرهنة السابقة نستنتج ما يلي :

١) القطعتين المستقيمتين اللتين تصلان نقطتي التماس مع نقطة تلاقي المماسين متطابقتان .

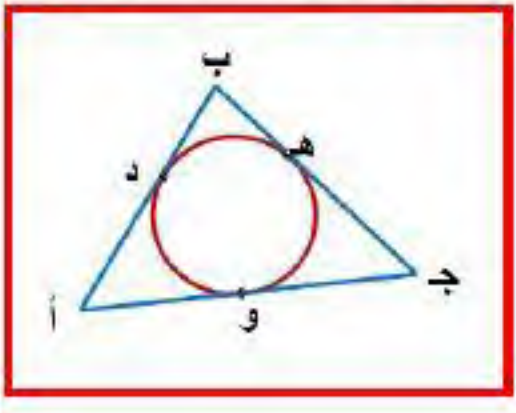
٢) المستقيم الواصل بين مركز الدائرة ونقطة تلاقي المماسين ينصف الزاوية المحصورة بين المماسين ، وينصف الزاوية المركزية المحصورة بين نصفي القطرين المارين بنقطتي التماس .

==========

مثال (٣) : يمثل الشكل المثلث أ ب جـ الذي يمس الدائرة في النقاط د ، هـ ، و

أ د = ٣ سم ، ب د = ٢ سم ، ب جـ = ٦ سم ، جد أطوال أضلاع المثلث أ ب جـ .

الحل :



- أ و = أ د = ٣ سم

مماسان مرسومان من نقطة أ

- ب هـ = ب د = ٢ سم

مماسان مرسومان من نقطة ب

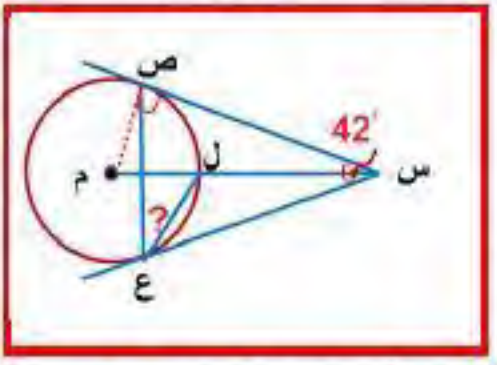
- جـ هـ = جـ ب − هـ ب = ٤ سم
- جـ هـ = جـ و = ٤ سم
- إذا ب جـ = ٦ سم ، أ ب = ٥ سم ، أ جـ = ٧ سم .

==========

سليمان دلدوم أبو هيه

مثال (٤) : $\overline{\text{س ص}}$ ، $\overline{\text{س ع}}$ مماسان لدائرة مركزها م (الشكل) ،عند النقطتين

ص ، ع على التوالي ، ق∠ص س ع = ٤٢° ، جد ق∠ل ع ص .



الحل : نصل $\overline{\text{م ص}}$

- ق∠ص س م = ق∠ع س م = ٢١°

مبرهنة .

- ق∠م ص س = ٩٠° ← $\overline{\text{م ص}} \perp \overline{\text{س ص}}$

نصف القطر عمودي على المماس

- ق∠س م ص = ١٨٠° − (٢١° + ٩٠°) = ٦٩° إكمال زوايا المثلث س م ص .

- ق∠ل ع ص = $\frac{١}{٢}$ ق∠س م ص = ٣٤٫٥° محيطية ومركزية على الوتر $\overline{\text{ل ص}}$.

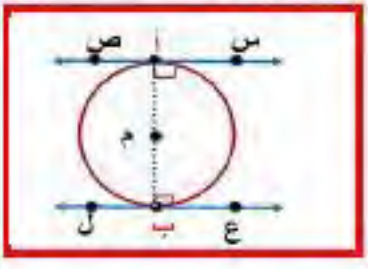
==========

مبرهنة :

المماسان المرسومان من نهايتي قطر في دائرة متوازيان .

المعطيات : (الشكل المجاور) $\overline{\text{س ص}}$ ، $\overline{\text{ع ل}}$ مماسان لدائرة مركزها م ، عند النقطتين

أ ، ب على التوالي ، $\overline{\text{أ ب}}$ قطر للدائرة م .



المطلوب : إثبات أن $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ع ل}}$

البرهان :

- $\overline{\text{م أ}} \perp \overline{\text{س ص}}$ ← ق∠س أ م = ٩٠°

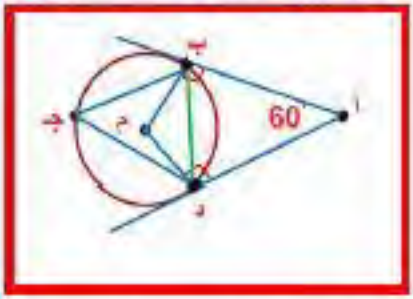
- $\overline{\text{م ب}} \perp \overline{\text{ع ل}}$ ← ق∠ع ب م = ٩٠°

- وبما أن الزاويتان س أ م ، ع ب م ، في وضعية تحالف ومجموع قياسهما ١٨٠°

إذاً : $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ع ل}}$.

سليمان دلدوم أبو هبه

مثال (٤) : يمثل الشكل المجاور دائرة مركزها م ، $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{أد}$ مماسان للدائرة عند النقطتين ب ، د على التوالي ، بحيث ق∠بأد = ٦٠° ، جد قياس كل من ∠أبد ، ∠بجد .



الحل :

- ق∠مبأ = ٩٠° ← $\overline{مب} \perp \overline{أب}$
- ق∠مدأ = ٩٠° ← $\overline{مد} \perp \overline{أد}$
- ق∠أبد = $\frac{١}{٢}$(١٨٠° − ٦٠°) = ٦٠° المثلث أ ب د متطابق الضلعين فيه أ ب = أ د ((المطلوب الأول))
- ق∠بمد = ٣٦٠° − (٩٠° + ٩٠° + ٦٠°) = ١٢٠°

((إكمال زوايا الشكل الرباعي أ ب م د))

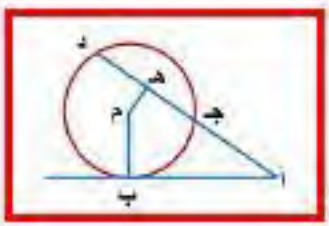
- ق∠بجد = $\frac{١}{٢}$ ق∠بمد = ٦٠° محيطية ومركزية على الوتر $\overline{بد}$

((المطلوب الثاني))

==========

مثال (٥) : يمثل الشكل دائرة مركزها م ، $\overleftarrow{أب}$ مماس لها عند النقطة ب ، $\overleftarrow{أد}$ قاطع لها في النقطتين جـ ، د ، النقطة هـ تقع على الوتر $\overline{جد}$ ، بحيث أن الزاويتين ب أ هـ ، ب م هـ متكاملتان .

أثبت أن النقطة هـ تنصف الوتر $\overline{جد}$



المعطيات : دائرة مركزها م ، $\overleftarrow{أب}$ مماس ، $\overleftarrow{أد}$ قاطع ، الزاويتين ب أ هـ ، ب م هـ متكاملتان .

سليمان دلدوم أبو هيه

المطلوب : إثبات أن النقطة هـ تنصف الوتر $\overline{جـ د}$.

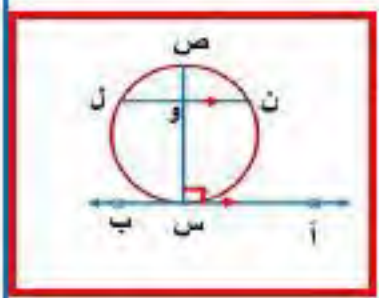
البرهان : في الشكل الرباعي أ هـ م ب ، الزاويتين ب أ هـ ، ب م هـ متكاملتان

أي أن ق∠ب أ هـ + ق∠ب م هـ = ١٨٠° منها نجد أن

ق∠م ب أ + ق∠م هـ أ = ١٨٠° لكن ق∠م ب أ = ٩٠° نصف القطر عمودي على المماس عند نقطة التماس ← ق∠م هـ أ = ٩٠° ، وبما أن $\overline{م هـ} \perp \overline{جـ د}$ ، إذا النقطة هـ تنصف الوتر $\overline{جـ د}$ (العمود النازل من مركز الدائرة على أي وتر فيها ينصفه)

==========

مثال (٩) : $\overline{س ص}$ قطر في دائرة ، $\overline{أ ب}$ مماس للدائرة عند النقطة س ، رسم الوتر $\overline{ن ل}$ // $\overline{أ ب}$ ، أثبت أن القطر $\overline{س ص}$ ينصف الوتر $\overline{ن ل}$.



المعطيات : الشكل المجاور .

المطلوب : إثبات أن القطر $\overline{س ص}$ ينصف الوتر $\overline{ن ل}$.

البرهان :

- $\overline{ص س} \perp \overline{أ ب}$ ← ق∠ص س أ = ٩٠°

القطر عمودي على المماس عند نقطة التماس .

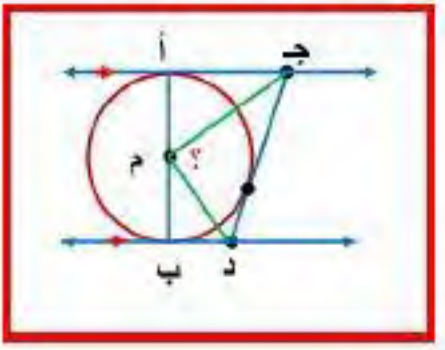
- $\overline{ن ل}$ // $\overline{أ ب}$ ← ق∠و س أ + ق∠ن و س = ١٨٠° زاويتان متحالفتان .
- لكن ← ق∠و س أ = ٩٠° ← ق∠ن و س = ٩٠° ← $\overline{س ص} \perp \overline{ن ل}$

إذا القطر $\overline{س ص}$ ينصف الوتر $\overline{ن ل}$. ((مبرهنة)) وهو المطلوب .

==========

مثال (٧) : مست دائرة مركزها م ، مستقيمين متوازيين في النقطتين أ ، ب ، ثم رسم مماس ثالث للدائرة ، فقطع المماسين المتوازيين في النقطتين جـ ، د .

أثبت أن الزاوية (جـ م د) قائمة .



المعطيات : دائرة مركزها م ، $\overleftrightarrow{جـ أ} // \overleftrightarrow{د ب}$ ،

$\overleftrightarrow{جـ أ}$ ، $\overleftrightarrow{د ب}$ مماسان للدائرة ، $\overleftrightarrow{جـ د}$ مماس للدائرة ، $\overline{أ ب}$ قطر في الدائرة .

المطلوب : إثبات أن ق(∠جـ م د) = ٩٠°

البرهان :

- $\overline{م جـ}$ ينصف ∠د جـ أ ← ق(∠د جـ م) = $\frac{١}{٢}$ ق(∠د جـ أ) ... (١)
- $\overline{م د}$ ينصف ∠جـ د ب ← ق(∠جـ د م) = $\frac{١}{٢}$ ق(∠جـ د ب) ... (٢)
- لكن الزاويتان (د جـ أ ، جـ د ب) زاويتان متحالفتان ومجموع قياسهما ١٨٠°

التبرير (($\overleftrightarrow{جـ أ} // \overleftrightarrow{د ب}$) و $\overleftrightarrow{جـ د}$ قاطع لهما)) .

← ق(∠د جـ م) + ق(∠جـ د م) = $\frac{١}{٢}$(١٨٠°) = ٩٠° وبما أن مجموع قياس زاويتين في المثلث (جـ م د) = ٩٠° إذا ق(∠جـ م د) = ٩٠° وهو المطلوب .

ملاحظة : يوجد طرق أخرى للحل .

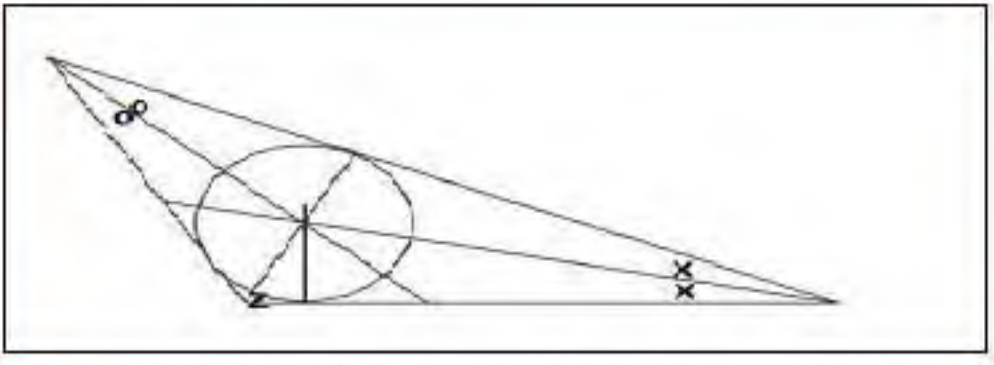
==========

سليمان دلدوم أبو هبه

مثال (٨) : أرسم المثلث أ ب جـ ، استخدم خصائص المماسات في تحديد مركز الدائرة التي تمس أضلاعه .

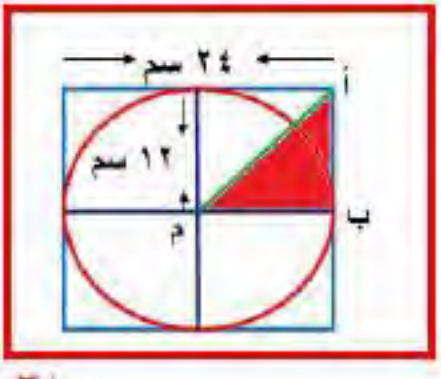
الحل : بما أن الدائرة تمس أضلاع المثلث ، إذا أضلاع المثلث مماسات للدائرة ، لذلك نقوم بتنصيف كل زاوية من زوايا المثلث فتكون نقطة تلاقي المنصفات هي مركز الدائرة التي تمس أضلاعه .

((المستقيم الواصل بين مركز الدائرة ونقطة تلاقي المماسين ينصف الزاوية المحصورة بين المماسين ، وينصف الزاوية المركزية المحصورة بين نصفي القطرين المارين بنقطتي التماس)) .



==========

مثال (٩) : وضع طبق دائري الشكل ، في صندوق قاعدته مربعة الشكل ، طول ضلعها ٢٤ سم ، بحيث إن محيط الطبق يمس جوانب الصندوق ، جد بعد مركز الطبق عن رأس قاعدة الصندوق .



الحل : الشكل المجاور

المطلوب : طول أ ب

لاحظ أن نصف قطر الطبق يساوي نصف طول قاعدة الصندوق = ١٢ سم .

سليمان دلدوم أبو هبه

نطبق مبرهنة فيثاغورس على المثلث أ ب م قائم الزاوية في ب (لماذا ؟؟؟)

$(\text{أم})^2 = (\text{أب})^2 + (\text{ب م})^2 \leftarrow (\text{أم})^2 = (١٢)^2 + (١٢)^2$

$(\text{أم})^2 = (١٤٤) + (١٤٤) \leftarrow (\text{أم})^2 = ٢٨٨$

أم = $١٢\sqrt{٢}$ سم . بعد مركز الطبق عن رأس قاعدة الصندوق

==========

مثال (١٠) : يمثل الشكل سلما طوله ١٢ مترا ، يرتكز بطرفه السفلي على أرض أفقية ، ويرتكز بطرفه العلوي على قبة أسمنتية ، على شكل نصف كرة ، بحيث يبعد ١٣ مترا مركز الكرة متراً عن طرف السلم السفلي ، جد طول نصف قطر القبة .

الحل : الشكل المجاور

نطبق مبرهنة فيثاغورس على المثلث أ ب م قائم الزاوية في ب (لماذا ؟؟؟)

$(\text{أم})^2 = (\text{أب})^2 + (\text{ب م})^2 \leftarrow (١٣)^2 = (١٢)^2 + (\text{ب م})^2$

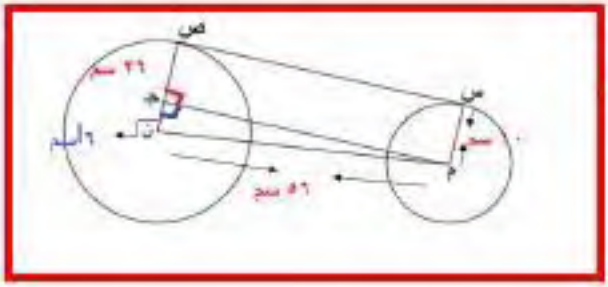
$(١٦٩)^2 = (١٤٤) + (\text{ب م})^2 \leftarrow (\text{ب م})^2 = ٢٥$

ب م = ٥ متراً . طول نصف قطر القبة

==========

مثال (١١) : يمثل الشكل حزاماً يمر على دولابين دائريين ، طول نصف قطر الدولاب الأصغر ١٠ سم ، وطول نصف قطر الدولاب الأكبر ٢٦ سم ، والبعد بين مركزيهما ٥٦ سم ، جد طول الجزء المستقيم من الحزام بين النقطتين س ، ص

الحل : الشكل المجاور



- ننزل العمود م جـ على ن ص

فينتج لدينا المستطيل س م جـ ص

- س ص = م جـ

ن جـ = ص ن – ص جـ

= ٢٦ – ١٠ = ١٦ سم

بتطبيق مبرهنة فيثاغورس على المثلث م جـ ن قائم الزاوية في جـ

$$(\text{م ن})^2 = (\text{م جـ})^2 + (\text{جـ ن})^2 \leftarrow (٥٦)^2 = (\text{م جـ})^2 + (١٦)^2$$

$$(٣١٣٦) = (\text{م جـ})^2 + (٢٥٦) \leftarrow (\text{م جـ})^2 = ٢٨٨٠$$

$$\text{م جـ} = ٢٤\sqrt{٥}$$

لكن م جـ = س ص ، إذا طول س ص = $٢٤\sqrt{٥}$ سم

ثانياً الزاوية المماسية

Angle between Tangent and Chord

- ارسم أي وتر في دائرة ، ثم ارسم مماس للدائرة من إحدى نهايتي الوتر ، لاحظ أنه نتج لدينا زاويتان ، تسمى كل زاوية من الزاويتين الناتجتين بالزاوية المماسية .
- في الشكل المجاور الزاويتان (ب أ س ، ب أ ص) زاويتان مماسيتان .

ملاحظات على الزاوية المماسية :

١) رأس الزاوية نقطة التماس .

٢) ضلعاها وتر في دائرة وجزء من مماس

٣) الوتر والمماس عند نقطة التماس يحصران زاويتان مماسيتان .

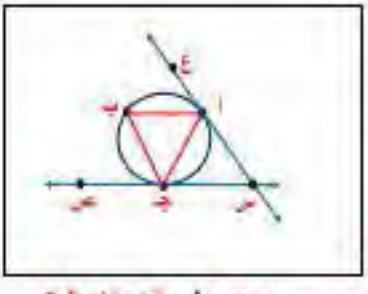
٤) يكون قياس الزاوية المماسية = ٩٠° ، إذا كان الوتر قطراً في الدائرة .

بناءً على ما سبق نعرف الزاوية المماسية بالتعريف التالي .

تعريف

الزاوية المماسية : هي الزاوية المحصورة بين مماس الدائرة وأي وتر مار بنقطة التماس .

سؤال : في الشكل المجاور $\overline{س ص}$ ، $\overline{س ع}$ مماسان للدائرة في النقطتين جـ ، أ ، على التوالي



١) اكتب جميع الزوايا المماسية التي رأسها النقطة أ

٢) اكتب جميع الزوايا المماسية التي رأسها النقطة جـ

٣) باستخدام المنقلة جد قياس كل من الزاويتين (جـ أ ب ، ب جـ ص) ماذا تلاحظ ؟

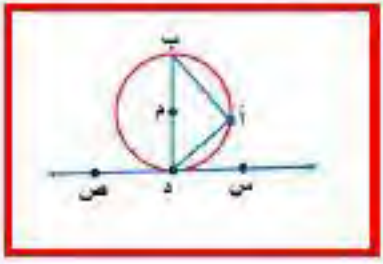
سليمان دلدوم أبو هبه

مبرهنة :

قياس الزاوية المماسية يساوي قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس .

الحالة الأولى :

إذا كان مركز الدائرة يقع على ضلع الزاوية المحيطية (الشكل المجاور) .



المعطيات : دائرة مركزها م ، $\overline{\text{س ص}}$ مماس للدائرة عند النقطة د ، أ د وتر في الدائرة .

المطلوب : إثبات أن ∠ب أ د = ∠أ د س

البرهان :

- القطر عمودي على المماس عند نقطة التماس

$\overline{\text{ب د}} \perp \overline{\text{س ص}}$ ← ∠أ د س + ∠أ د ب = ٩٠° ... (١)

- ∠ب أ د = ٩٠° محيطية على القطر $\overline{\text{ب د}}$

← ∠أ ب د + ∠أ د ب = ٩٠° ..... (٢)

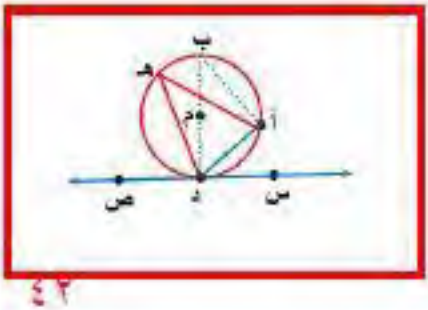
- من (١) ، (٢)

∠أ د س + ∠أ د ب = ∠أ ب د + ∠أ د ب ومنها

∠أ د س = ∠أ ب د وهو المطلوب .

==========

الحالة الثانية :



مركز الدائرة لا يقع على ضلع المحيطية

المعطيات : الشكل المجاور

المطلوب : إثبات أن ∠أ هـ د = ∠أ د س

سليمان دلدوم أبو هنه

البرهان :

نصل القطر $\overline{ب د}$ ، الوتر $\overline{أ د}$.

ق∠أ ب د = ق∠أ د س برهان الحالة الأولى

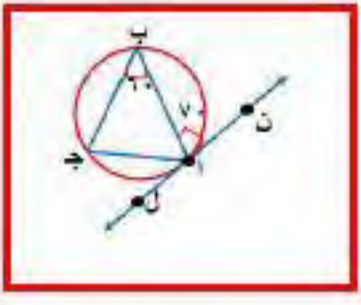
لكن ق∠أ ب د = ق∠أ هـ د محيطيتان على الوتر $\overline{أ د}$.

إذاً ق∠أ هـ د = ق∠أ د س وهو المطلوب .

ملاحظة : بدمج الحالتين الأولى والثانية نحصل على البرهان بشكل عام .

==========

مثال (١) : في الشكل المجاور جد قياسات زوايا المثلث أ ب جـ .



الحل :

- ق∠ب جـ أ = ق∠ب أ ن = ٧٠°

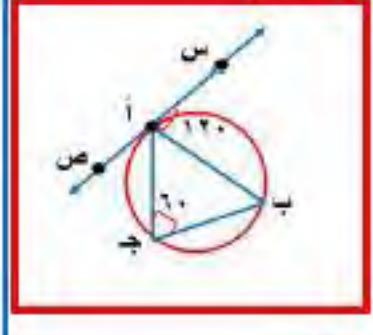
محيطية ومماسية على القوس $\widehat{أ ب}$

- ق∠ب أ جـ = ١٨٠° − (٦٠° + ٧٠°) = ٥٠°

إكمال زوايا المثلث أ ب جـ .

==========

مثال (٢) : في الشكل المجاور أثبت أن المثلث أ ب جـ متطابق الأضلاع .



الحل :

- ق∠س أ ب = ق∠أ جـ ب = ٦٠°

محيطية ومماسية على القوس $\widehat{أ ب}$

- ق∠ب أ جـ = ق∠س أ جـ − ق∠س أ ب = ٦٠°

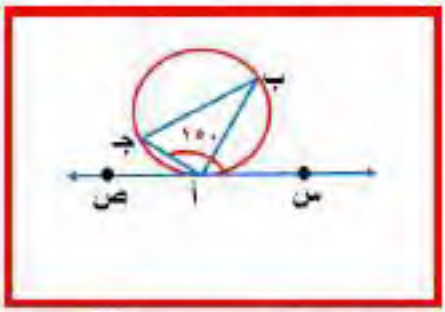
- ق∠أ ب جـ = ١٨٠° − (٦٠° + ٦٠°) = ٦٠°

سليمان دلدوم أبو هبه

ق∠بأجـ = ق∠أجـب = ق∠جـبأ = ٦٠°

إذا المثلث أ ب جـ متساوي الأضلاع .

==========



مثال (٣) : في الشكل المجاور جد ق∠أبجـ

الحل :

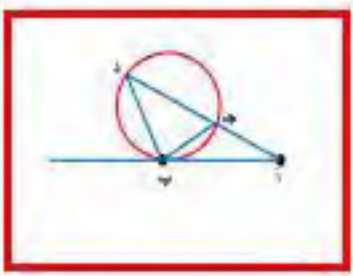
- ق∠جـأص = ٣٠°

إكمال قياس ∠ س أ ص المستقيمة .

- ق∠أبجـ = ق∠جـأص = ٣٠° محيطية ومماسية على القوس $\overset{\frown}{أجـ}$.

==========

مثال (٤) : في الشكل المجاور أثبت أن (أب)^{٢} = أجـ × أد



المعطيات : $\overline{أب}$ مماس للدائرة في النقطة ب . (الشكل)

المطلوب : إثبات أن (أب)^{٢} = أجـ × أد

البرهان : نبحث في تشابه المثلثين أ ب جـ ، أ د ب

ق∠جـأب = ق∠دأب

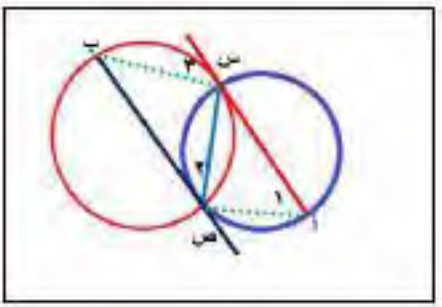
ق∠جـدب = ق∠أبجـ محيطية ومماسية على القوس $\overset{\frown}{بجـ}$

إذاً يتشابه المثلثان وينتج أن

$\frac{أب}{أد} = \frac{أجـ}{أب}$ ← (أب)^{٢} = أجـ × أد وهو المطلوب

==========

مثال (٥) : تقاطعت دائرتان في س ، ص ، رسم الوتر $\overline{\text{س أ}}$ في إحدى الدائرتين مماساً للأخرى في النقطة س ، ورسم الوتر $\overline{\text{ص ب}}$ في الدائرة الثانية مماساً للأولى في النقطة ص ، أثبت أن $\overline{\text{س ب}}$ // $\overline{\text{ص أ}}$.



المعطيات :

دائرتان متقاطعتان في النقطتين س ، ص ،

$\overline{\text{س أ}}$ مماس للدائرة الحمراء .

$\overline{\text{ص ب}}$ مماس للدائرة الزرقاء .

المطلوب :

. إثبات أن $\overline{\text{س ب}}$ // $\overline{\text{ص أ}}$

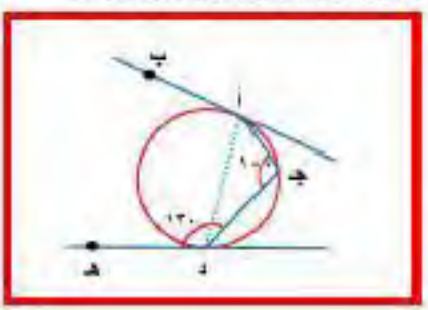
البرهان :

- ق∠١ = ق∠٢ محيطية ومماسية $\overline{\text{ص ب}}$ مماس للدائرة الزرقاء .
- ق∠٢ = ق∠٣ محيطية ومماسية $\overline{\text{س أ}}$ مماس للدائرة الحمراء .

إذاً ق∠١ = ق∠٣ وبما أنهما في وضع تناظر ومتساويتان إذاً

$\overline{\text{س ب}}$ // $\overline{\text{ص أ}}$ وهو المطلوب .

==========



مثال (٦) : في الشكل المجاور جد ق∠جاب

الحل : نصل $\overline{\text{أ د}}$

ق∠أدهـ = ق∠أجهـ = ١٠٠° محيطية ومماسية

إذاً ق∠جدأ = ٣٠°

ق∠بأد = ق∠أجد = ١٠٠° محيطية ومماسية

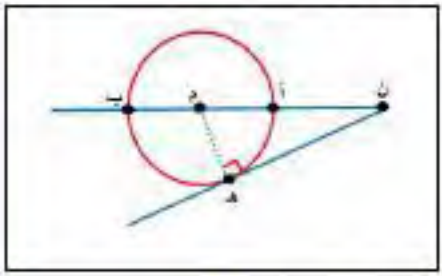
ق∠جأد = ٥٠° إكمال زوايا المثلث أ جـ د .

← ق∠جأب = ق∠جأد + ق∠دأب

= ٥٠° + ١٠٠° = ١٥٠° وهو المطلوب

==========

مثال (٧) : في الشكل المجاور دائرة مركزها م ، $\overline{أب}$ قطراً في الدائرة ، $\overline{نهـ}$ مماس للدائرة عند النقطة هـ ، $\overline{نب}$ قاطع للدائرة في النقطتين أ ، ب .



أثبت أن $(نهـ)^٢ = نأ \times نب$

البرهان : نصل $\overline{مهـ}$ ، ثم نطبق مبرهنة فيثاغورث على المثلث ن هـ م ، قائم الزاوية في هـ (لماذا ؟) .

$(نم)^٢ = (نهـ)^٢ + (مهـ)^٢ \leftarrow (نهـ)^٢ = (نم)^٢ - (مهـ)^٢$

لكن مهـ = مب

$(نهـ)^٢ = (نم)^٢ - (مب)^٢$

$= (نم - مب)(نم + مب)$

$(نهـ)^٢ = نأ \times نب$ وهو المطلوب .

==========

الشكل الرباعي الدائري والزاوية الخارجة عنه

Cyclic Quadrilateral and its Exterior Angle

عدد الدوائر التي يمكن رسمها وتمر كل منها :

١) بنقطة معلومة عدد لا نهائي من الدوائر

٢) بنقطتين معلومتين عدد لا نهائي من الدوائر

٣) بثلاث نقاط معلومة (ليست على استقامة واحدة) ، دائرة واحدة فقط (المثلث)

٤) بأربع نقاط مستوية وليست على استقامة واحدة ، دائرة واحدة ضمن شروط معينة فمثلا يمكن رسم دائرة تمر في رؤوس مربع لكن لا يمكن رسم دائرة تمر في رؤوس متوازي الأضلاع .

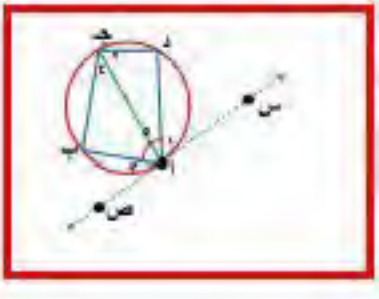
والشكل الرباعي الذي يمكن رسم دائرة تمر في رؤوسه الأربع يسمى رباعي دائري .

تعريف

الشكل الرباعي الدائري : هو الشكل الرباعي الذي تقع رؤوسه على دائرة .

ومن خصائص الشكل الرباعي الدائري

((مبرهنة)) : مجموع قياسي كل زاويتين متقابلتين يساوي ١٨٠°



المعطيات : أ ب جـ د شكل رباعي دائري

المطلوب : إثبات أن :

١) ∠ب أ د + ∠ب جـ د = ١٨٠°

٢) ∠د أ جـ + ∠أ ب جـ = ١٨٠°

البرهان :

- نرسم المماس $\overline{\text{س ص}}$ يمس الدائرة في النقطة أ ، نصل جـ أ .
- ∠١ = ∠٢ محيطية ومماسية على القوس $\overset{\frown}{\text{أ جـ}}$.

- ق∠٤ = ق∠٣ محيطية ومماسية على القوس $\overset{\frown}{\text{أب}}$.
- لكن ق∠١ + ق∠٥ + ق∠٣ = ١٨٠° زوايا على خط مستقيم .
- إذاً ق∠٢ + ق∠٤ + ق∠٥ = ١٨٠° وهو المطلوب الأول .

لكن مجموع قياسات الشكل الرباعي = ٣٦٠°

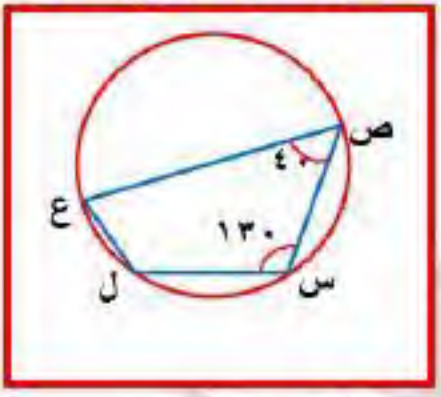
إذاً ق∠أ د جـ + ق∠أ ب جـ = ١٨٠° وهو المطلوب الثاني .

==========

مثال (١) :

س ص ع ل ، شكل رباعي دائري ، فيه ق∠س = ١٣٠° ، ق∠ص = ٤٠°

جد قياس كل من ∠ع ، ∠ل .



الحل :

الشكل رباعي دائري

- ق∠ل = ١٨٠° − ٤٠° = ١٤٠°

ص ، ل زاويتان متقابلتان

ق∠ع = ١٨٠° − ١٣٠° = ٥٠° . س ، ع زاويتان متقابلتان

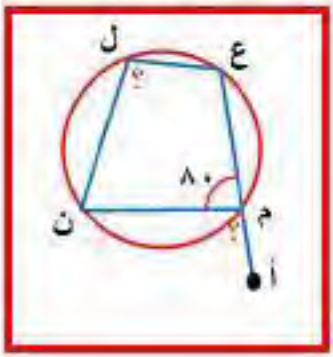
مثال (٢) :

أ ب جـ د ، شكل رباعي دائري فيه ق∠أ يساوي ثلاثة أمثال ق∠جـ ، جد ق∠جـ .

الحل : مجموع قياسي الزاويتين أ ، جـ = ١٨٠° ، زاويتان متقابلتان في رباعي دائري

نفرض ق∠جـ = س ← ق∠أ = ٣س ← س + ٣س = ١٨٠° ← س = ٤٥°

مثال (٣) : م ن ل ع شكل رباعي دائري ، فيه ق(∠٢) = ٨٠° ، مد ع م باتجاه م إلى نقطة أ ، جد قياس كل من : ق(∠ع ل م) ، ق(∠٢ ن م) ، ماذا تلاحظ ؟



الحل :

- ق(∠ع ل م) = ١٨٠° − ٨٠° = ١٠٠°

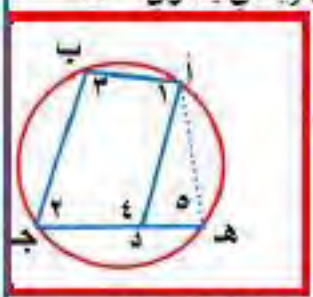
زاوية مقابلة للزاوية م في رباعي دائري .

- ق(∠٢ ن م) = ١٨٠° − ٨٠° = ١٠٠°

زاوية مجاورة للزاوية م على خط مستقيم .

- نلاحظ أن ق(∠ع ل م) = ق(∠٢ ن م)

((مبرهنة)) : إذا كان مجموع قياسي زاويتين متقابلتين في شكل رباعي يساوي ١٨٠° فإن هذا الشكل يكون رباعياً دائرياً .



المعطيات : أ ب جـ د ، شكل رباعي فيه ق(∠١) + ق(∠٢) = ١٨٠

المطلوب : أثبات أن الشكل الرباعي أ ب جـ د ، شكل رباعي دائري .

البرهان :

ارسم الدائرة التي تمر بالنقاط أ ، ب ، جـ ، ثم افرض النقطة د ، تقع داخل الدائرة (الشكل) ، مد جـ د من جهة د حتى يقطع الدائرة في النقطة هـ .

ق(∠١) + ق(∠٢) = ١٨٠° معطيات

ق(∠٣) + ق(∠٤) = ١٨٠° مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي أ ب جـ د = ٣٦٠°

لكن ق(∠٣) + ق(∠٥) = ١٨٠° الشكل أ ب جـ هـ رباعي دائري

فيكون ق(∠٤) = ق(∠٥) وهذا لا يتحقق ، إلا إذا انطبقت د على هـ

أي أن النقطة د تقع على الدائرة ، أي أن الشكل أ ب جـ د شكل رباعي دائري (وهو المطلوب) .

مثال (٤) :

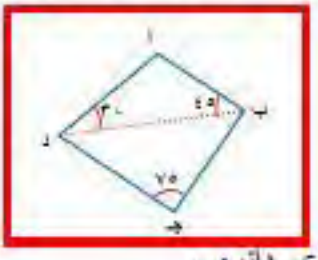
هل يمكن رسم شكل رباعي دائري ، قياسات زواياه ٥٠° ، ١١٠° ، ١٣٥° ، ٦٥° برر إجابتك ؟

الحل : لا يمكن لأنه لا يوجد مجموع قياسي زاويتين = ١٨٠° .

==========

مثال (٥) : أ ب جـ د شكل رباعي فيه ق∠ب جـ د = ٧٥° ، ق∠أ ب د = ٤٥°

ق∠أ د ب = ٣٠° ، أثبت أن الشكل الرباعي أ ب جـ د ، شكل رباعي دائري .



الحل :

- ق∠ب أ د = ١٠٥° إكمال زوايا المثلث ب أ د
- ق∠ب أ د + ق∠ب جـ د = ١٨٠° وبما

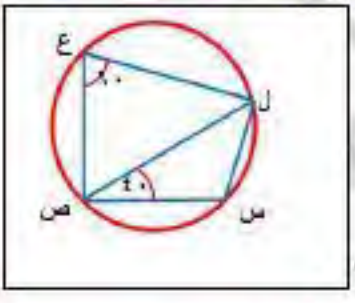
أنهما متقابلتان في شكل رباعي ، إذا الشكل أ ب جـ د رباعي دائري .

==========

مثال (٦) :

س ص ع ل شكل رباعي دائري ، فيه ق∠ص ع ل = ٦٠° ، ق∠ص س ل = ٤٠° ،

جد ق∠ص ل س .



الحل :

- ق∠ل س ص = ١٢٠° تكمل الزاوية

ق∠ل ع س = ٦٠° في الشكل الرباعي الدائري

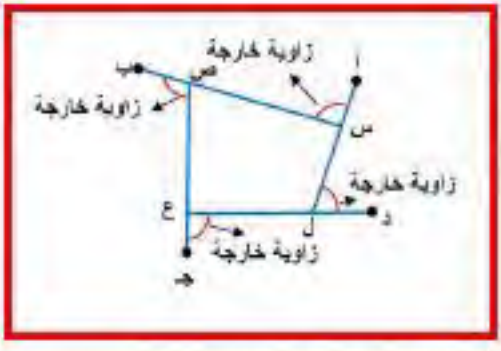
- ق∠ص ل س = ٢٠° إكمال قياسات زوايا المثلث ل س ص .

تعريف

الزاوية الخارجة عن الشكل الرباعي : هي الزاوية المحصورة بين امتداد أحد أضلاعه والضلع المجاور له .

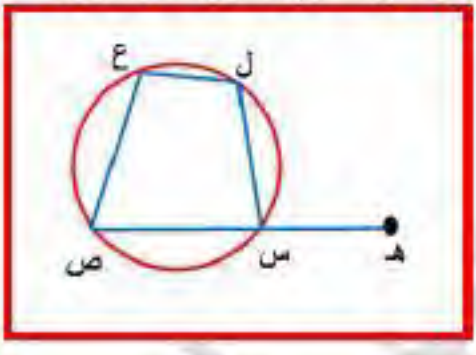
الشكل المجاور يوضح الزوايا الخارجة عن الشكل الرباعي ، والناتجة من مد الأضلاع

((تحذير : هذه الزوايا ليست فقط الخارجة للشكل الرباعي انتبه للتعريف))



==========

((سرهنة)) : قياس الزاوية الخارجة عن الشكل الرباعي الدائري يساوي قياس الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة .



المعطيات : الشكل المجاور ، فيه الزاوية هـ س ل زاوية خارجة عن الشكل الرباعي الدائري س ص ع ل .

المطلوب :

إثبات أن ق∠هـ س ل = ق∠ص ع ل .

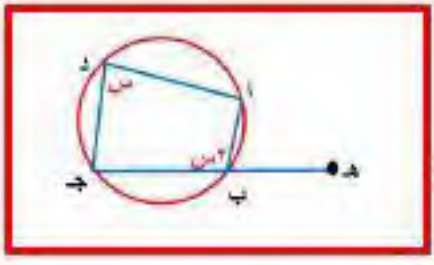
البرهان :

- ق∠هـ س ل + ق∠ل س ص = ١٨٠° ..... (١) متجاورتان على خط مستقيم
- ق∠ص ع ل + ق∠ل س ص = ١٨٠° ..... (٢) متقابلتان في رباعي دائري
- من (١) ، (٢) ← ق∠هـ س ل = ق∠ص ع ل وهو المطلوب .

==========

مثال (٧) : أ ب جـ د شكل رباعي دائري فيه ق∠أ د جـ يساوي نصف ق∠أ ب جـ

مد الضلع جـ ب من جهة ب إلى هـ ، جد ق∠أ ب هـ .



الحل :

نفرض

ق∠أ د جـ = س ← ق∠أ ب جـ = ٢ س

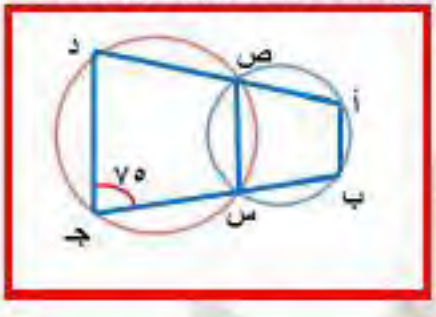
ق∠أ د جـ + ق∠أ ب جـ = ١٨٠°

متقابلتان في رباعي دائري

← س + ٢ س = ١٨٠° ← ٣ س = ١٨٠° ← س = ٦٠°

ق∠أ ب هـ = ق∠أ د جـ = ٦٠° زاوية خارجة عن الشكل الراعي الدائري .

==========



مثال (٨) : في الشكل المجاور جد قياس كل من :

∠أ ص س ، ∠أ ب س

الحل :

- ق∠أ ص س = ق∠س جـ د = ٧٥°

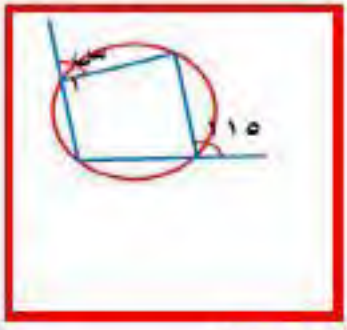
زاوية خارجة عن الشكل الرباعي الدائري ص جـ د ص .

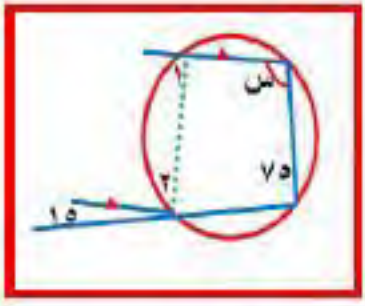
- ق∠أ ب س + ق∠أ ص س = ١٨٠° زاويتان متقابلتان في رباعي دائري .

إذا ق∠أ ب س = ١٨٠° − ٧٥° = ١٠٥°

==========

مثال (٩) : جد قيمة س في كل شكل من الأشكال الآتية :





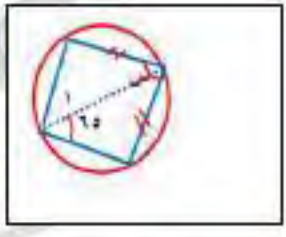
ق(∠أ) = ١١٥°

ق(∠أ) = ٧٥°

س = ٧٥°

ق(∠أ) + ق(∠٢) + ١٥° = ١٨٠° بالتحالف

ق(∠٢) = ٩٠° ← س = ١٠٥°



ق(∠أ) = ٦٥° زاويتان محيطيتان على وترين متساويين

س = ١٨٠° − ١٣٠° = ٥٠° متقابلتان (رباعي دائري)

==========

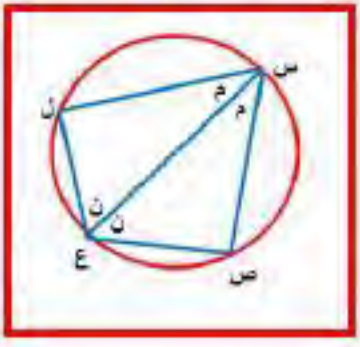
مثال (١٠) :

أ ب جـ د شكل رباعي دائري ، فيه ق(∠أ) = ٣ع + ١٠° ، ق(∠جـ) = ٢ع − ٣٠° ، جد قياس كل من : ∠أ ، ∠جـ .

- الحل : ق(∠أ) + ق(∠جـ) = ١٨٠° متقابلتان في رباعي دائري . .
- ٣ع + ١٠° + ٢ع − ٣٠° = ١٨٠° ← ع = ٤٠°
- ق(∠أ) = ٣(٤٠°) + ١٠° = ١٣٠° ، ق(∠جـ) = ٢(٤٠°) − ٣٠° = ٥٠°

مثال (١١) : س ص ع ل ، شكل رباعي دائري فيه $\overline{\text{س ع}}$ ينصف كلا من : ∠س ، ∠ع

أثبت أن $\overline{\text{س ع}}$ قطر للدائرة .



المعطيات : الشكل المجاور

المطلوب : إثبات أن $\overline{\text{س ع}}$ قطر للدائرة .

البرهان :

نفرض ق(∠س) = ٢م ، $\overline{\text{س ع}}$ ينصف ∠س

نفرض ق(∠ع) = ٢ن ، $\overline{\text{س ع}}$ ينصف ∠ع

٢م + ٢ن = ١٨٠° ← م + ن = ٩٠° ، ∠س ، ∠ع متقابلتان في رباعي دائري .

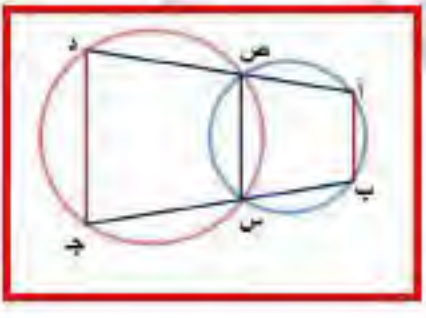
وبإكمال قياسات زوايا المثلث س ص ع ← ق(∠ص) = ٩٠° .

وبإكمال قياسات زوايا المثلث س ل ع ← ق(∠ل) = ٩٠° .

وبما أنهما محيطيتان على الوتر $\overline{\text{س ع}}$ في الدائرة إذاً $\overline{\text{س ع}}$ قطر للدائرة .

((ملاحظة : يكفي إثبات أن زاوية واحدة فقط قائمة))

مثال (١٢) : في الشكل المجاور ، أثبت أن $\overline{\text{أب}} \parallel \overline{\text{دجـ}}$



البرهان :

- ق(∠دصس) = ق(∠أبس) زاوية خارجة للرباعي الدائري أ ب س ص .
- ق(∠أصس) = ق(∠جـس) زاوية خارجة للرباعي الدائري ص س جـ د .
- لكن ق(∠أصس) + ق(∠دصس) = ١٨٠° زاويتان متجاورتان على خط مستقيم

• ∴ ق∠أبس + ق∠جءس = ١٨٠° وبما أنهما في وضع تحالف ومجموع قياسهما يساوي ١٨٠° ← $\overline{أب}$ // $\overline{ءجـ}$ وهو المطلوب .

==========

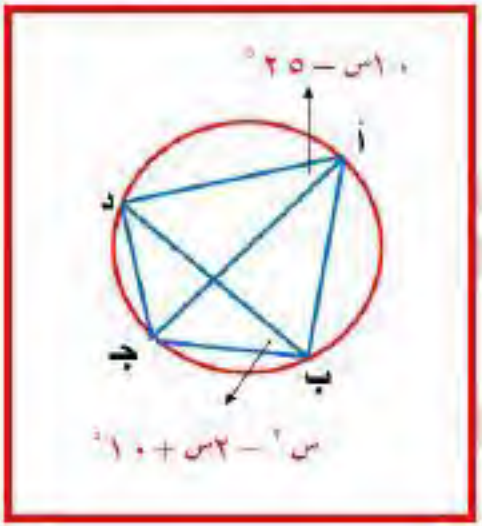
مثال (١٣) :

(بصورة عامة يُعد متوازي الأضلاع شكلاً رباعياً دائرياً) : ناقش صحة هذه العبارة .

الحل :

العبارة خاطئة لأن في متوازي الأضلاع كل زاويتين متقابلتين متساويتين في القياس ولا يمكن أن يكون مجموع قياسهما = ١٨٠° .

مثال (١٤) : أ ب جـ د شكل رباعي دائري . فيه ق∠ب جـ = س^{٢} − ٢س + ١٠° ، ق∠جـ أ د = ١٠ أس − ٢٥° ، جد القياسات المحتملة للزاوية د ب جـ .



الحل :

• ق∠ب جـ = ق∠جـ أ د

محيطيتان على الوتر $\overline{ءجـ}$

س^{٢} − ٢س + ١٠° = ١٠ أس − ٢٥°

س^{٢} − ١٢ أس + ٣٥° = ٠°

(س − ٧°)(س − ٥°) = ٠°

(س = ٧°) ، (س = ٥°)

عند س = ٧° ← ق∠ب جـ = ٤٩ − ١٤ + ١٠ = ٤٥°

عند س = ٥° ← ق∠ب جـ = ٢٥ − ١١ + ١٠ = ٢٥°

بعض الحالات التي يمكن إثبات فيها أن الشكل الرباعي شكلاً رباعياً دائرياً

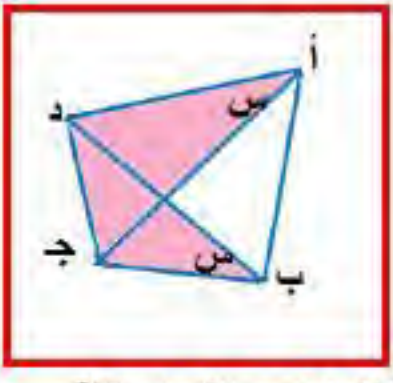
١) قياس الزاوية الخارجة للشكل الرباعي تساوي قياس الزاوية الداخلية المقابلة للمجاورة لها .

٢) مجموع قياسي زاويتين متقابلتين في شكل رباعي = ١٨٠° .

٣) تساوي قياسي زاويتين مرسومتين من جهة واحدة من أحد أضلاع (الشكل)

ق∠ب جـ د = ق∠ب أ جـ

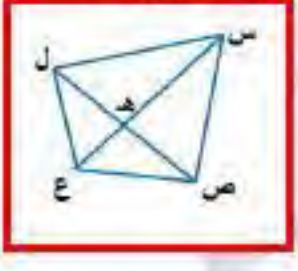
زاويتان متساويتان في القياس ومرسومتان من جهة واحدة من الضلع د جـ .



٤) إذا كانت الأعمدة المقامة من منتصفات أضلاع الشكل الرباعي تتلاقى في نقطة واحدة .

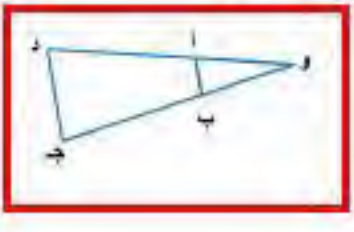
٥) إذا كانت القطع المكونة لقطري الشكل الرباعي متناسبة

س هـ × هـ ع = ص هـ × هـ ل



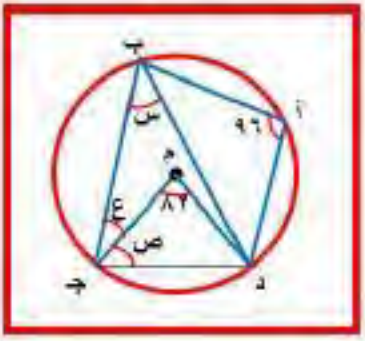
٦) إذا تحققت نظرية الأوتار المتقاطعة خارج دائرة .

في الشكل المجاور أ ب جـ د شكل رباعي ، مد الضلعين د أ ، جـ ب ، من جهتي أ ، ب ، على التوالي فتلاقيا في النقطة و ، إذا كان و أ × و د = و ب × و جـ فإن الشكل الرباعي أ ب جـ د ، شكلاً رباعياً دائرياً .



أسئلة الوحدة

١) يمثل الشكل المجاور دائرة مركزها م ، جد قيمة كل من : س ، ص ، ع .



الحل :

- س = ٤١° محيطية ومركزية على الوتر $\overline{\text{ب جـ}}$.
- ص = ٤٩° المثلث م د جـ متطابق الضلعين .
- ص + ع + ٩٦° = ١٨٠° الشكل أ ب جـ د رباعي دائري ← ع = ٣٥°

---

٢) أ ب جـ ، مثلث متساوي الأضلاع مرسوم داخل دائرة ، بحيث تقع رؤوسه عليها ، نصف القوس الأصغر $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$ في النقطة هـ ، أثبت أن $\overline{\text{جـ هـ}}$ قطر للدائرة .

الحل : نصل $\overline{\text{أ هـ}}$ ، $\overline{\text{ب هـ}}$.

- ق∠ أ جـ هـ = ق∠ ب جـ هـ = ٣٠°

محيطيتان على قوسين متساويين

- ق∠ ب أ هـ = ق∠ ب جـ هـ = ٣٠°

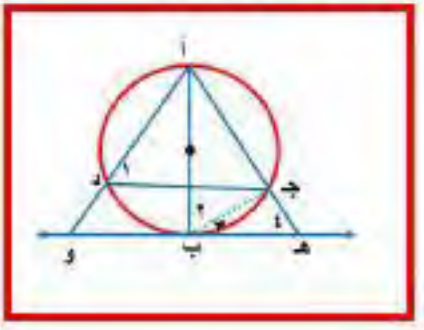
محيطيتان على القوس $\overset{\frown}{\text{هـ ب}}$.

- ∴ ق∠ أ جـ هـ = ٩٠° . وبما أنها زاوية محيطية مرسومة على الوتر $\overline{\text{جـ هـ}}$ ،

∴ $\overline{\text{جـ هـ}}$ قطر للدائرة .

ملاحظة : يوجد طرق أخرى للحل .

٣) $\overline{أب}$ قطر في دائرة ، $\overline{أجـ}$ ، $\overline{أد}$ وتران فيها ، على جهتين مختلفتين من القطر $\overline{أب}$ ، رسم مماس للدائرة عند النقطة ب بحيث لاقى امتداد $\overline{أجـ}$ في النقطة هـ ، ولاقى امتداد $\overline{أد}$ في النقطة و ، أثبت أن الشكل جـ د و هـ شكل رباعي دائري .



المعطيات : دائرة مركزها م ، $\overline{أجـ}$ ، $\overline{أد}$ وتران

$\overline{هـ و}$ مماس للدائرة عند النقطة ب

$\overline{أب}$ قطر للدائرة ، ((الشكل المجاور)) .

المطلوب :

إثبات أن الشكل جـ د و هـ شكل رباعي دائري .

البرهان : نصل $\overline{أجـ}$

- $\overline{أب} \perp \overline{هـ و}$ ← ق∠٢ + ق∠٣ = ٩٠° ..... (١)
- ق∠هـ جـ ب = ٩٠° الزاوية أ جـ ب محيطية على القطر $\overline{أب}$

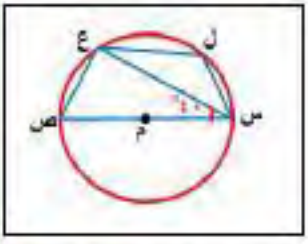
∴ ق∠٤ + ق∠٣ = ٩٠° ..... (٢)

- من (١) ، (٢) ← ← ق∠٢ = ق∠٤ ..... (٣)
- لكن ق∠١ = ق∠٢ ..... (٤) محيطيتان على الوتر $\overline{أجـ}$

ق∠١ = ق∠٤ وبما أن ∠١ زاوية خارجة للشكل الرباعي جـ د و هـ وقياسها يساوي قياس ∠٤ المقابلة للمجاورة لها ، إذاً الشكل جـ د و هـ شكل رباعي دائري

==========

٤) س ص ع ل شكل رباعي دائري ، فيه $\overline{\text{س ص}}$ قطر للدائرة ، ق∠ع س ص = ٤٠° ، جد ق∠س ل ع .



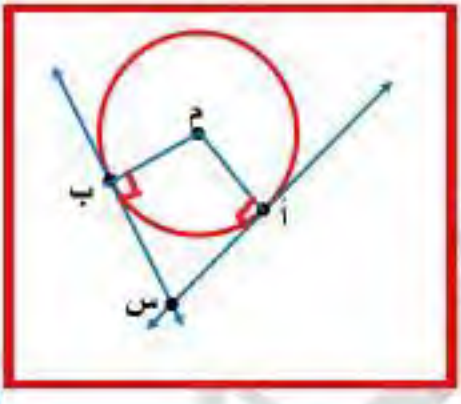
الحل :

- ق∠س ع ص = ٩٠° محيطية على القطر $\overline{\text{س ص}}$
- ق∠س ص ع = ٥٠° إكمال زوايا المثلث س ص ع
- ق∠س ل ع + ق∠س ص ع = ١٨٠° متقابلتان في الرباعي الدائري س ص ع ل

← ← ق∠س ل ع = ١٣٠° وهو المطلوب .

==========

٥) دائرة مركزها م ، فيها $\overline{\text{س أ}}$ ، $\overline{\text{س ب}}$ ، مماسان للدائرة عند النقطتين أ ، ب ، أثبت أن الشكل س أ م ب شكل رباعي دائري .



الحل :

- $\overline{\text{م أ}}$ ⊥ $\overline{\text{س أ}}$ ← ق∠م أ س = ٩٠°
- $\overline{\text{م ب}}$ ⊥ $\overline{\text{س ب}}$ ← ق∠م ب س = ٩٠°

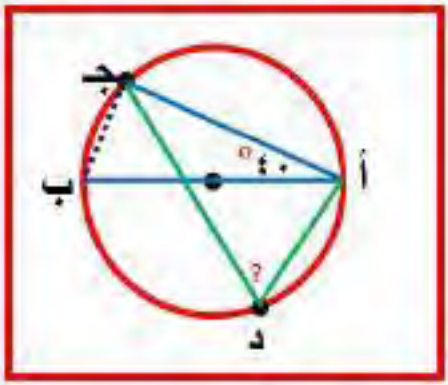
وبما أنهما متقابلتان في الشكل الرباعي س أ م ب

ومجموع قياسهما = ١٨٠° إذاً

الشكل س أ م ب شكل رباعي دائري .

==========

٦) $\overline{أب}$ قطر في دائرة ، النقطتان جـ ، د على الدائرة بحيث ق∠جاب = ٤٠° ،
جد ق∠اد جـ .

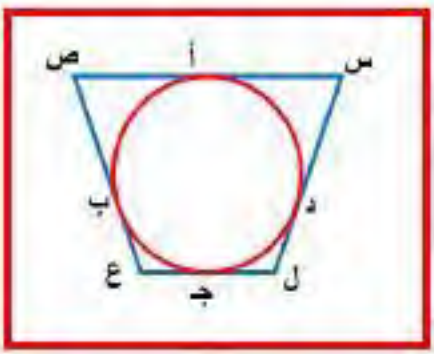


الحل : بما أن السؤال لم يحدد موقع النقطتين
لذلك يمكن حل السؤال حسب وضع
النقطتين

- نصل $\overline{بجـ}$ ← ق∠اجب = ٩٠°
محيطية على القطر $\overline{أب}$.
- ق∠اب جـ = ٥٠° إكمال قياسات زوايا المثلث اب جـ .
- ق∠اد جـ = ق∠اب جـ = ٥٠° محيطيتان على الوتر $\overline{اجـ}$ وهو المطلوب .

==========

٧) س ص ع ل شكل رباعي مرسوم بداخله دائرة تمس أضلاعه ، أثبت أن :
س ص + ع ل = ص ع + ل س .



الحل : اعتمادا على نظرية المماسين المرسومين
لدائرة من نقطة خارجها .

س أ = س د ، ، ، (١)
ل د = ل جـ ، ، ، (٢)
ع جـ = ع ب ، ، ، (٣)
ص أ = ص ب ، ، ، (٤)

• س ص = اس + اص ، ، ، ، (٥) ، • ل ع = جل + جع ، ، ، ، (٦)

بجمع (٥) ، (٦)

س ص + ل ع = اس + جل + اص + جع

لكن من ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤

س ص + ل ع = س ص + ص ل + ص ب + ب ع

س ص + ل ع = س ل + ص ع

وهو المطلوب .

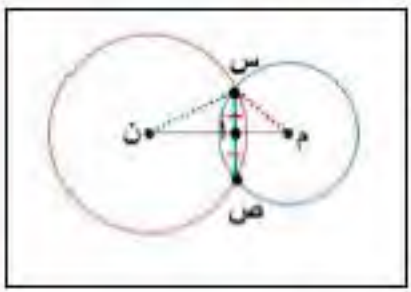
==========

٨) تقاطعت دائرتان مركزاهما م ، ن في النقطتين س ، ص النقطة أ منتصف $\overline{\text{س ص}}$

أ) أثبت أن النقاط م ، أ ، ن تقع على استقامة واحدة .

ب) إذا كان س ص = ٨ سم ، طول نصف قطر الدائرة التي مركزها م = ٥ سم ، طول نصف قطر الدائرة التي مركزها ن = ٧ سم ، جد م ن .

الحل : الشكل المجاور



أ) $\overline{\text{س ص}}$ وتر مشترك للدائرتين ، النقطة أ منتصف الوتر $\overline{\text{س ص}}$ إذا

$\overline{\text{م أ}} \perp \overline{\text{س ص}}$ ← ق∠م أ س = ٩٠°

$\overline{\text{ن أ}} \perp \overline{\text{س ص}}$ ← ق∠ن أ س = ٩٠°

∴ ق∠م أ ن = ١٨٠° ← النقاط م ، أ ، ن تقع على استقامة واحدة .

===

ب) س ص = ٨ سم ← س أ = ٤ سم ،، م س = ٥ سم ،، ن س = ٧ سم .

بتطبيق مبرهنة فيثاغورس على المثلث م أ س ← م أ = ٣ سم

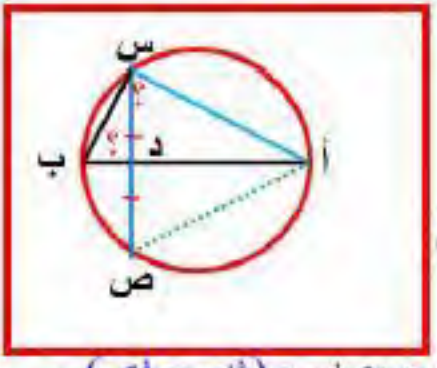
بتطبيق مبرهنة فيثاغورس على المثلث ن أ س ← ن أ = $\sqrt{٣٣}$ سم

إذا م ن = ٣ + $\sqrt{٣٣}$ سم .

==========

خط المركزين : هو القطعة المستقيمة الواصلة بين مركزي دائرتين .

٩) $\overline{أب}$ قطر في دائرة ينصف الوتر $\overline{س ص}$ أثبت أن ق∠أ ب س = ق∠أ س ص



البرهان : نصل $\overline{أس}$

ق∠أ د س = ق∠أ د ص = ٩٠°

(($\overline{أب}$ ينصف الوتر $\overline{س ص}$))

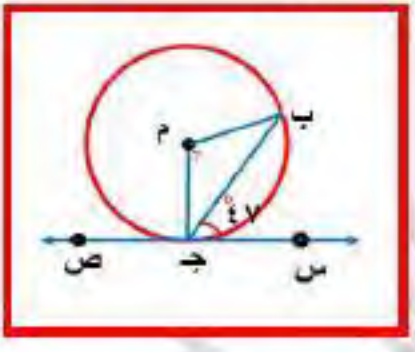
في المثلث أ س ص ← أ س = أ ص ((لماذا ؟))

إذا

ق∠أ ب س = ق∠أ س ص مرسومتان على وترين متساويين (أ س = أ ص) .

==========

١٠) في الشكل المجاور دائرة مركزها م ، $\overline{س ص}$ مماس لها عند النقطة جـ ، جد ق∠ب م جـ .



الحل :

$\overline{م جـ}$ ⊥ $\overline{س ص}$ ← ق∠م جـ س = ٩٠°

← ق∠م جـ ب = ٤٣° متممة ∠ب جـ س

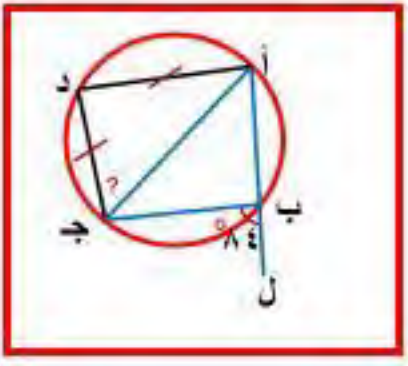
← ق∠ب م جـ = ١٨٠° − ٢(٤٣°)

← ق∠ب م جـ = ٩٤° وهو المطلوب

==========

١١) أ ب جـ د شكل رباعي دائري فيه أ د = جـ د ، مد $\overline{\text{أ ب}}$ في اتجاه ب إلى النقطة ل ، بحيث أن : ∠ د جـ ب ل = ٨٤° ، جد ∠ د أ جـ .

الحل :



∠ د أ جـ = ∠ د ب ل = ٨٤° مبرهنة

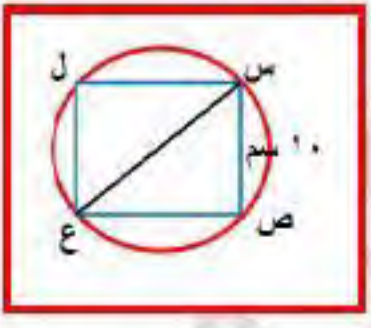
المثلث أ د جـ متطابق الضلعين (معطيات)

← ∠ د جـ أ = $\frac{١}{٢}$ (١٨٠° − ٨٤°) = ٤٨°

==========

١٢) س ص ع ل مستطيل مرسوم داخل دائرة نصف قطرها (١٧) سم ، بحيث تمس رؤوسه ، إذا كان س ص = ١٠ سم ، جد مساحة المستطيل س ص ع ل .

الحل : الشكل المجاور



$\overline{\text{س ع}}$ قطر للدائرة (لماذا ؟) س ع = ٣٤ سم (لماذا ؟)

بتطبيق مبرهنة فيثاغورس على المثلث س ص ع

(س ع)^{٢} = (س ص)^{٢} + (ص ع)^{٢}

(٣٤)^{٢} = (١٠)^{٢} + (ص ع)^{٢}

(ص ع)^{٢} = ١١٥٦ − ١٠٠ = ١٠٥٦

ص ع ≈ ٣٢٫٥ سم

مساحة المستطيل (س ص) × (ص ع) ≈ ١٠ × ٣٢٫٥ ≈ ٣٢٥ سم٢ .

١٣) رسمت دائرة داخل المثلث أ ب جـ ، بحيث تمس أضلاعه $\overline{أب}$ ، $\overline{ب جـ}$ ، $\overline{جـ أ}$ في النقاط س ، ص ، ع على التوالي ، إذا كان أ ب = ١٠ سم ، ب جـ = ١٣ سم جـ أ = ٧ ، جد أ س .

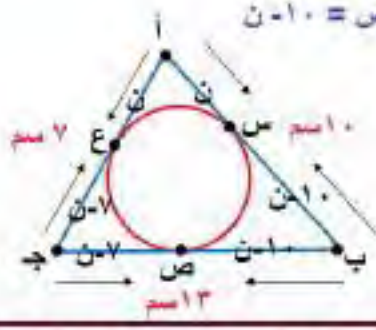
الحل :

نفرض أ س = ن

أ س = أ ع = ن ، ب س = ب ص = ١٠ - ن

جـ ص = جـ ع = ٧ - ن

محيط المثلث أ ب جـ = ٣٠ سم



ن + ١٠ - ن + ١٠ - ن + ٧ - ن + ٧ - ن + ن = ٣٠ ← ٣٤ - ٢ ن = ٣٠

ن = ٢ ← أ س = ٢ سم

==========

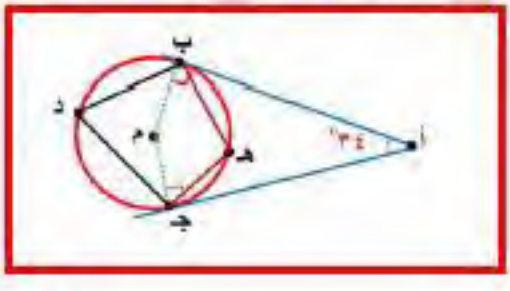
١٤) $\overline{أب}$ ، $\overline{أ جـ}$ مماسان لدائرة مركزها م ، عند النقطتين ب ، جـ

ق ∠ ب أ جـ = ٣٤° ، ء نقطة على القوس الأكبر $\widehat{ب جـ}$. هـ نقطة على القوس الأصغر $\widehat{ب جـ}$ ، جد قياس كل من ∠ ب ء جـ ، ∠ ب هـ جـ .

الحل : نصل $\overline{م ب}$ ، $\overline{م جـ}$

الشكل أ ب م جـ رباعي دائري (لماذا ؟)

إذا ق ∠ ب م جـ = ١٤٦°



• ق ∠ب د جـ = $\frac{1}{2}$ ق ∠ب أ جـ = ٧٣° محيطية ومركزية

• ق ∠ب هـ جـ = ١٨٠° − ٧٣° = ١٠٧° الشكل ب هـ جـ د رباعي دائري .

==========

١٥) قناة مائية ، مقطعها العرضي على شكل نصف دائرة ، طول قطرها (٥) م ، عرض سطح الماء فيها (٨ و ٤) م ، جد عمق الماء في القناة .

الحل : الشكل المجاور

بتطبيق مبرهنة فيثاغورس على المثلث أ ا س لإيجاد طول أ ا

(أ س)^2 = (أ ا)^2 + (س ا)^2

(٢ و ٥)^2 = (أ ا)^2 + (٢ و ٤)^2

٦ و ٢٥ = (أ ا)^2 + ٥ و ٧٦

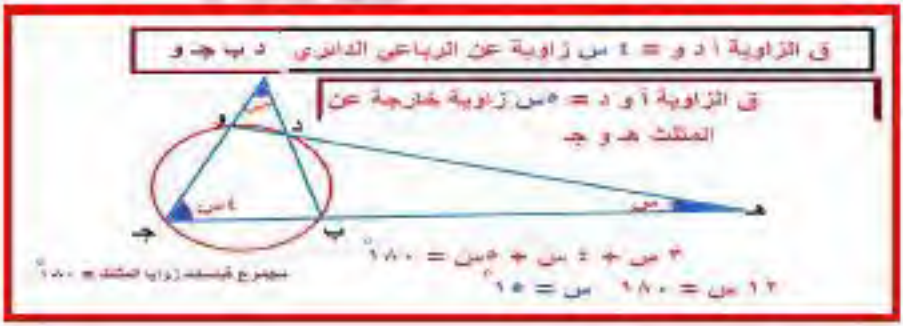
(أ ا)^2 = ٠ و ٤٩ ← أ ا = ٠ و ٧

ا ب = أ ب − أ ا = ٢ و ٥ − ٠ و ٧ = ١ و ٨ متر عمق الماء .

==========

١٦) في الشكل المجاور جد قيمة س .

الحل :



المملكة الأردنية الهاشمية
بمناسبة عيد الجلوس